PRÁCTICO 2

Ejercicio 7

(a) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$.

(b) ¿Cuántas soluciones hay si se reemplaza el = por un <?

(c) Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ tal que se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones $x_1 > 1$, $x_2 > 1$, $x_3 \geq 3$, $x_4 \geq 3$.

a) cantidad de soluciones naturales de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$$

$$1 + 2 + 0 + 1 + 0 + 0 + 0 = 4$$

la cantidad de soluciones es la cantidad de formas de elegir 4 entre $x_1, x_2, \dots, x_7$ sin importar el orden y pudiendo repetir

$$CR^7_4$$

b) cantidad de soluciones naturales de

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 < 4$$

<u>caso 1</u>: con = 3

$\longrightarrow CR^7_3$ soluciones

<u>caso 2</u>: con = 2

$\longrightarrow CR^7_2$ soluciones

<u>caso 3</u>: con = 1

$\longrightarrow CR^7_1 = 7$ soluciones

<u>caso 4</u>: con = 0

$\longrightarrow 1$ solución

Por la regla de la suma la cantidad de soluciones con < 4 es:

$$CR_k^n = C_k^{n+k-1}$$

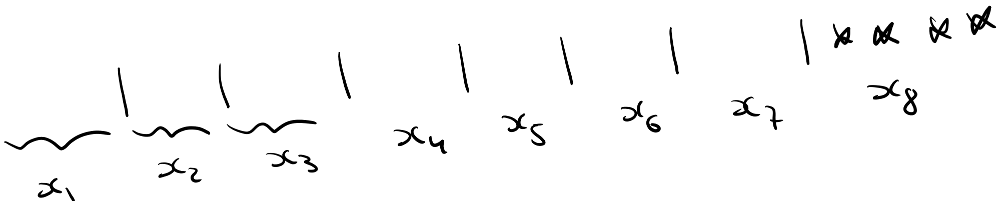
$$CR_3^7 + CR_2^7 + 7 + 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 4 \quad \text{con} \quad x_8 \geq 1$$

tienen la misma cantidad de soluciones

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 3$$

$$CR_3^8 = C_3^{10} = \frac{10!}{3!\,7!}$$



$$\hookrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0$$

Ejercicio 12

Probar que el coeficiente en $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}$ de $(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n$ es $PR^n_{(n_1,\ldots,n_r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$, donde los exponentes son naturales tales que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n$$

buscamos el coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}$

Si $n=3$

$(a+b+c)^3$

$(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$

$$\begin{array}{ccc} a & a & a \end{array} \longrightarrow a^3$$

$$\left.\begin{array}{ccc} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{array}\right\} \longrightarrow ab^2c^0$$

→ la cantidad de formas que aparece ab^2 es la cantidad de palabras con 1 a y 2 b (y cero c): $\frac{3!}{1!\,2!\,0!} = 3$

en general:

el coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$ en el desarrollo de $(x_1+x_2+\dots+x_r)^n$:

$$\underbrace{x_1 x_1 x_1 \cdots x_1}_{n_1 \text{ veces}} \underbrace{x_2 x_2 \cdots x_2}_{n_2 \text{ veces}} \cdots \underbrace{x_r x_r x_r \cdots x_r}_{n_r \text{ veces}}$$

$$x_2 x_5 x_1 x_r x_1 x_1 \cdots$$

el coeficiente de $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$ es la cantidad palabras de n letras donde x_1 aparece n_1, x_2 aparece n_2, ..., x_r aparece n_r veces

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!} \quad \text{con } n_1+n_2+\dots+n_r = n$$

Ejercicio 11

$(a-b)^2 = 1a^2 - 2ab + 1b^2$

(a) Hallar el coeficiente en x^5 en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$. $= ?x^{50} + ?x^{\cdots} + \ldots + ?x^5 + \ldots$

$(x^5+x-1)(x^5+x-1)(x^5+x-1) \cdots\cdots (x^5+x-1)$

$-1 \quad -1 \quad x^5 \quad -1 \longrightarrow (-1)^9(x^5)^1$

$x \quad x \quad x \quad x \; x \quad -1 \quad -1 \longrightarrow (-1)^5 x^5$

caso 1: elijo x^5 una vez y -1 nueve veces

$\longrightarrow$ 10 posibilidades

caso 2: elijo x cinco veces y -1 cinco veces

$\longrightarrow \dfrac{10!}{5!\,5!} = C^{10}_5$

$$C^n_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C^n_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\underbrace{(n-(n-k))}_{k}!}$$

entonces en el desarollo vamos a tener

$$10(-1)^9 x^5 + C^{10}_5 (-1)^5 x^5$$

$$\frac{10!}{5!\,5!} = 252$$

$$= -10x^5 - \frac{10!}{5!\,5!}x^5$$

$$= -10x^5 - 252x^5$$

$$= \underbrace{-262}_{\text{coeficiente de } x^5 \text{ en el desarrollo}} x^5$$

A B $\underbrace{\text{C D E}}$ M M $\underbrace{\text{M M M}}$

MMMMM

10 monedas

5 diferentes entre sí

5 indistinguibles

elegir 5 de estas 10

caso 1: 5 diferentes $\longrightarrow$ 1 forma

caso 2: 4 diferentes $\longrightarrow$ C^5_4 $\overbrace{\text{A B C D E}}^{C^5_4}\overbrace{\text{M M M M M}}^{\text{1 forma de elegir una de estas}}$

caso 3: 3 diferentes $\longrightarrow$ C^5_3

⋮

$$\sum_{k=0}^{5} C^5_k \cdot 1$$

$\underbrace{\text{A B C D E}}_{\text{3 de estas}}\ \underbrace{\text{M M M M M}}_{\text{2 de estas}}$

C^5_3 1 forma

$$C^5_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot \overset{2\times\cancel{2}}{4} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\,\cancel{2!}} = 5 \cdot 2 = 10$$

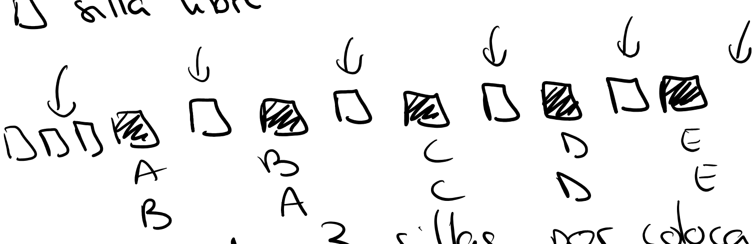
Ejercicio 6

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 personas en 12 sillas puestas en línea?

(b) Ídem pero las personas no deben quedar sentadas en asientos contiguos.

▨ silla ocupada

□ silla libre



nos quedan 3 sillas por colocar

tenemos 3 lugares entre los seis lugares no nos importa el orden y podemos repetir $CR_3^6 = 56$

hay 5! formas de sentar a las personas en las sillas ocupadas

etapa 1: elijo las sillas donde se van a sentar

$\rightarrow$ 56 formas

etapa 2: siento a las personas

$\rightarrow$ 5! formas

por RP: $5! \cdot 56$