Ejercicio 9
¿De cuántas formas se puede partir un conjunto de $2n$ elementos en n conjuntos de 2 elementos?

vamos a pensarlo con $n=3$

tenemos $\{\underbrace{A,B},C,\underbrace{D,E},F\}$ y queremos partirlo en 3 conjuntos de 2 elementos

1ra etapa: elijo 2 elementos de los 6

$\longrightarrow C^6_2$ formas de elegirlos

2da etapa: elijo 2 elementos entre los 4 restantes

$\longrightarrow C^4_2$ formas de elegirlos

3ra etapa: elijo 2 elementos entre los 2 restantes

$\longrightarrow C^2_2 = 1$ formas de elegirlos

por regla del producto

$C^6_2 \cdot C^4_2 \cdot C^2_2 \longleftarrow$ al hacer esto estamos poniendo un orden

$\{A,B,\overbrace{C,D,E,F}\}$

$$\left.\begin{array}{lll} \{A,B\} & \{C,D\} & \{E,F\} \\ \{E,F\} & \{A,B\} & \{C,D\} \\ \{E,F\} & \{C,D\} & \{A,B\} \\ \{A,B\} & \{E,F\} & \{C,D\} \\ \{C,D\} & \{A,B\} & \{E,F\} \\ \{C,D\} & \{E,F\} & \{A,B\} \end{array}\right]$$

son el mismo

$\longrightarrow$ cada caso aparece $3!$ veces

→ la cantidad de formas de partir $\{A, B, C, D, E, F\}$ en 3 conjuntos de dos elementos es

$$\frac{C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2}{3!}$$

generalizamos a n cualquiera

→ tenemos un conjunto con 2n elementos y lo queremos partir en n conjuntos de 2 elementos

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{C_2^{2n} \cdot C_2^{2n-2} \cdot C_2^{2n-4} \cdot \ldots \cdot C_2^2}{n!} =$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{(2n)!}{\underbrace{2!}_{=2}\cancel{(2n-2)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n-2)!}}{2!\cancel{(2n-4)!}} \cdot \frac{\cancel{(2n-4)!}}{2!\cancel{(2n-6)!}} \cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{2!}}{2!\,0!}$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{(2n)!}{2^n}$$

Ejercicio 4
¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

Primero le repartimos un bizcocho de cada tipo a cada estudiante

$\rightarrow$ nos quedan 5 de chocolate y 4 de crema

1ra etapa: repartimos 5 de chocolate entre 3 estudiantes

$\star$ = bizcocho de chocolate

$\star \mid \star\star \mid \star\star$

$\underbrace{\star\star}_{\text{estudiante 1}} \quad \underbrace{\star}_{\text{estudiante 2}} \quad \underbrace{\star\star}_{\text{estudiante 3}} \longrightarrow \underbrace{\star\star}_{\text{estudiante 1}} \Big| \underbrace{\star}_{\text{est. 2}} \Big| \underbrace{\star\star}_{\text{est. 3}}$

$\underbrace{\quad}_{\text{est. 1}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{est. 2}} \quad \underbrace{\star\star\star\star\star}_{\text{estudiante 3}} \longrightarrow \underbrace{\quad}_{\text{est. 1}} \Big| \underbrace{\quad}_{\text{est. 2}} \Big| \underbrace{\star\star\star\star\star}_{\text{estudiante 3}}$

entonces queremos contar las palabras formadas por 2 barritas y 5 estrellas: $\frac{7!}{2!\,5!} = \frac{7\cdot 6\cdot \cancel{5!}}{2!\,\cancel{5!}} = 21$

2da etapa: repartir 4 bizcochos de crema entre 3 estudiantes

$\underbrace{\star\star}_{\text{est. 1}} \Big| \underbrace{\quad}_{\text{est. 2}} \Big| \underbrace{\star\star}_{\text{est. 3}}$

queremos contar la cantidad de palabras con 2 barritas y 4 estrellas: $\frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{2!\,\cancel{4!}} = 3\cdot 5 = 15$

Por la regla del producto la cantidad de formas de repartir los bizcochos es $21\cdot 15$

Combinaciones con repetición: ¿De cuántas formas podemos repartir k bizcochos entre n personas?

→ "elegir k personas entre las n personas pudiendo repetir"

★ = bizcochos

★★ | | ★ | ...... | ★★★

queremos contar la cantidad de palabras con n-1 barritas y k estrellas

$$\frac{(k+n-1)!}{(n-1)!\,k!} = C_k^{k+n-1} = CR_k^n$$ combinaciones con repetición de k en n

Ejercicio 5

(a) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar 3 dados idénticos?

Tirar 3 dados es lo mismo que elegir 3 números del 1 al 6 sin importar el orden y pudiendo repetir

CR_3^6 → 6: cuantas caras tiene cada dado

3 dados de 6 caras

$$CR_3^6 = C_3^{6+3-1} = C_3^8 = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\underbrace{3!}_{3 \cdot 2}\,\cancel{5!}} = 56$$

otra forma de pensarlo:

caso 1: sale el mismo número

1,1,1 ; 2,2,2 ; ...

$\longrightarrow$ hay 6 posibilidades

caso 2: un número sale 2 veces y otro número sale una sola vez

etapa 1: elijo el numero que sale 2 veces $\{6, 5, 6\}$

$\longrightarrow$ 6 posibilidades

etapa 2: elijo el número que sale 1 vez

$\longrightarrow$ 5 posibilidades

por la regla del producto hay $6 \cdot 5$ posibilidades

caso 3: salen 3 números distintos

$\longrightarrow$ hay que elegir 3 números del 1 al 6 sin repetir y no importa el orden

C_3^6 posibilidades

Por la regla de la suma la cantidad de resultados es:

$$6 + 6 \cdot 5 + C_3^6 = 6 + 30 + \frac{6!}{3!3!}$$

$$= 6 + 30 + \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3}! \, \cancel{3!}}$$

$$= 6 + 30 + 20$$

$$= 56$$