

Ejercicio 9

¿De cuántas formas se puede partir un conjunto de $2n$ elementos en n conjuntos de 2 elementos?

Vamos a pensarlo con $n=3$

tenemos $\{A, B, C, D, E, F\}$ y queremos partirlo en 3 conjuntos de 2 elementos

1^{ra} etapa: elijo 2 elementos de los 6

→ C_2^6 formas de elegirlos

2^{da} etapa: elijo 2 elementos entre los 4 restantes

→ C_2^4 formas de elegirlos

3^{ra} etapa: elijo 2 elementos entre los 2 restantes

→ $C_2^2 = 1$ formas de elegirlos

por regla del producto

$C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2 \leftarrow$ al hacer esto estamos poniendo un orden

$\{A, B, C, D, E, F\}$

$\{A, B\}$	$\{C, D\}$	$\{E, F\}$
$\{E, F\}$	$\{A, B\}$	$\{C, D\}$
$\{E, F\}$	$\{C, D\}$	$\{A, B\}$
$\{A, B\}$	$\{E, F\}$	$\{C, D\}$
$\{C, D\}$	$\{A, B\}$	$\{E, F\}$
$\{C, D\}$	$\{E, F\}$	$\{A, B\}$

Son el mismo

→ cada caso aparece $3!$ veces

→ la cantidad de formas de partir $\{A, B, C, D, E, F\}$ en 3 conjuntos de dos elementos es

$$\frac{C_2^6 \cdot C_2^4 \cdot C_2^2}{3!}$$

generalizamos a n cualquiera

→ tenemos un conjunto con $2n$ elementos y lo queremos partir en n conjuntos de 2 elementos

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\frac{C_2^{2n} \cdot C_2^{2n-2} \cdot C_2^{2n-4} \cdots C_2^2}{n!} =$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{(2n)!}{\underbrace{2!(2n-2)!}_2} \cdot \frac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!} \cdot \frac{(2n-4)!}{2!(2n-6)!} \cdots \frac{2!}{2!0!}$$

$$= \frac{1}{n!} \frac{(2n)!}{2^n}$$

Ejercicio 4

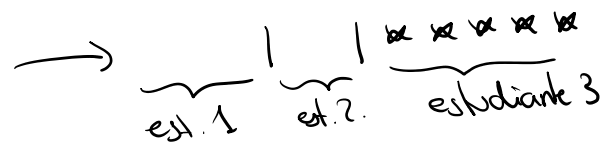
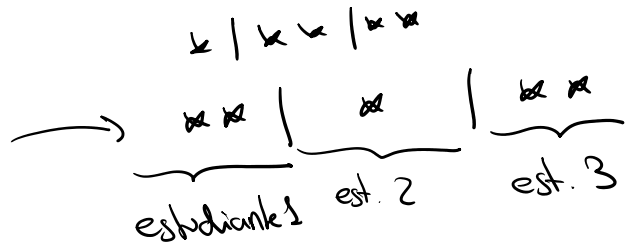
¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

Primero le repartimos un bizcocho de cada tipo a cada estudiante

→ nos quedan 5 de chocolate y 4 de crema

1^{ra} etapa: repartimos 5 de chocolate entre 3 estudiantes

* = bizcocho de chocolate



entonces queremos contar las palabras formadas por 2 barritas y 5 estrellas :

$$\frac{7!}{2! 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2! 5!} = 21$$

2^{da} etapa: repartir 4 bizcochos de crema entre 3 estudiantes



queremos contar la cantidad de palabras con 2 barritas y 4 estrellas:

$$\frac{6!}{2! 4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! 4!} = 3 \cdot 5 = 15$$

Por la regla del producto la cantidad de formas de repartir los bizcochos es $21 \cdot 15$

Combinaciones con repetición: ¿De cuántas formas podemos

repartir k bizcochos entre n personas?

→ "elegir k personas entre las n personas pudiendo repetir"

x = bizcochos

$x x \mid \mid x \mid \dots \mid x x x$

queremos contar la cantidad de palabras con $n-1$ barras y k estrellas

$$\frac{(k+n-1)!}{(n-1)! k!} = C_k^{k+n-1} = CR_k^n \quad \text{combinaciones con repetición de } k \text{ en } n$$

Ejercicio 5

(a) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar 3 dados idénticos?

Tirar 3 dados es lo mismo que elegir 3 números del 1 al 6 sin importar el orden y pudiendo repetir

$\textcircled{6} \rightarrow$ cuántas caras tiene cada dado
 $CR_{\textcircled{3}}^{\textcircled{6}}$

↓
3 dados de 6 caras

$$CR_3^6 = C_3^{6+3-1} = C_3^8 = \frac{8!}{3! 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{\textcircled{3!} 5!} = 56$$

$3 \cdot 2$

otra forma de pensarlo:

caso 1: sale el mismo número

1,1,1 ; 2,2,2 ; ...

→ hay 6 posibilidades

caso 2: un número sale 2 veces y otro número sale una sola vez

etapa 1: elijo el número que sale 2 veces $\{6, 5, 6\}$
→ 6 posibilidades

etapa 2: elijo el número que sale 1 vez
→ 5 posibilidades

por la regla del producto hay $6 \cdot 5$ posibilidades

caso 3: salen 3 números distintos

→ hay que elegir 3 números del 1 al 6 sin repetir y
no importa el orden

C_3^6 posibilidades

Por la regla de la suma la cantidad de resultados es:

$$\begin{aligned} 6 + 6 \cdot 5 + C_3^6 &= 6 + 30 + \frac{6!}{3!3!} \\ &= 6 + 30 + \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cancel{3!}} \\ &= 6 + 30 + 20 \\ &= 56 \end{aligned}$$