Regla de la suma

Heladería$_1$ = {chocolate, menta, frutilla}

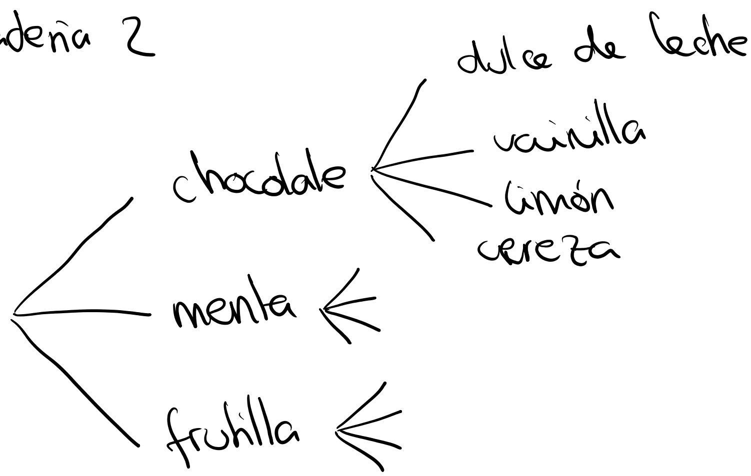
Heladería$_2$ = {dulce de leche, vainilla, limón, cereza}

conjuntos disjuntos

la cantidad de sabores para elegir es $3+4=7$

Regla del producto

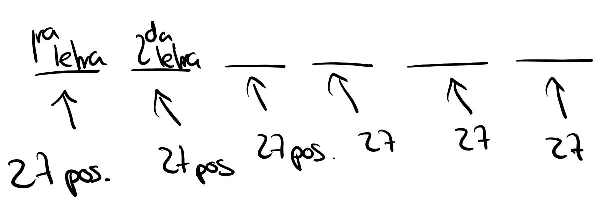
tomamos un helado en la heladería 1 y después un helado en la heladería 2



la cantidad de formas de elegir los dos sabores es $3 \cdot 4 = 12$

Ejercicio 1
Consideremos un alfabeto que posee 5 vocales y 22 consonantes. ¿Cuántas palabras de longitud 6 existen que no tengan dos consonantes o dos vocales juntas?

Primero: ¿cuántas palabras de 6 letras podemos hacer?



por la regla del producto hay 27^6 palabras de seis letras

ahora si: ¿cuántas palabras de 6 letras que no tengan dos consonantes ni dos vocales juntas?

(1) empezando con vocal

vocal	consonante	vocal	consonante	vocal	consonante
↓	↓	↓	↓	↓	↓
5 pos	22 pos	5 pos	22 pos	5 pos	22 pos

por la regla del producto hay $5^3 \cdot 22^3$ palabras

(2) empezando con consonante

consonante	vocal				
↓	↓				
22 pos	5 pos	22 pos	5 pos	22 pos	5 pos

por la regla del producto hay $5^3 \cdot 22^3$ palabras

Como los dos casos son disjuntos, por la regla de la suma hay $5^3 \cdot 22^3 + 5^3 \cdot 22^3 = 2 \cdot 5^3 \cdot 22^3$ palabras.

Permutaciones: tenemos un conjunto con n elementos, una permutación de los n elementos es una lista ordenada

→ por ejemplo: tenemos el conjunto $\{A, B, C\}$

BCA, CBA, ABC, BAC, ..., son permutaciones de $\{A, B, C\}$

3 pos. 2 pos. 1 pos.

por la regla del producto tenemos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ permutaciones de $\{A, B, C\}$

→ en general: cantidad de permutaciones de n elementos

(n-1)-ésimo n-ésimo lugar

n pos. $n-1$ pos. $n-2$ pos. ..... 2 pos. 1 pos

por la regla del producto la cantidad de permutaciones de n elementos es $n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$

Ejercicio 8
Hallar la cantidad de palabras distintas que pueden obtenerse permuntando las letras de la palabra *ALGORITMO*, con o sin sentido. Por ejemplo, *LOGARITMO* y *RITMOALGO* cuentan.

ALGORITMO

vamos a diferenciar entre las dos O
es decir vamos a contar la permutaciones de $ALGO_1RITMO_2$

hay $9!$ permutaciones

→ el problema es que estamos contando de más

$ALGO_1RITMO_2$ y $ALGO_2RITMO_1$ son la misma palabra pero las contamos como diferentes

entonces la cantidad de permutaciones de ALGORITMO es $\frac{9!}{2}$

otro ejemplo: permutaciones de BANANA

→ distinguimos entre las 3 As y las 2 Ns

cantidad de permutaciones de $BA_1N_1A_2N_2A_3$: $6!$

→ si permutamos las Ns nos da la misma palabra

BAN_1AN_2A es la misma que BAN_2AN_1A

→ si permutamos las As nos da la misma palabra

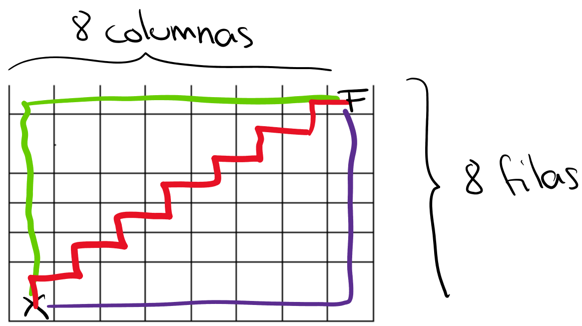
$BA_1NA_2NA_3 = BA_2NA_1NA_3 = BA_3NA_1NA_2 =$

$= BA_3NA_2NA_1 = BA_1NA_3NA_2 = BA_2NA_3NA_1$

en total hay $\frac{6!}{2!\cdot 3!} = \left(6!/2!\right)/3!$

Ejercicio 5

(c) ¿Cuántos recorridos diferentes puede realizar una torre de ajedrez para desplazarse desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha, admitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha?



DDDDDDDAAAAAAA

AAAAAAADDDDDDD

ADADADADADADAD

la cantidad de recorridos = cantidad de palabras que tienen 7 As y 7 Ds

$$= \frac{14!}{7! \cdot 7!}$$

Ejercicio 2
Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural n.

CB: $n=0$

$$7^0 - 2^0 = 1-1 = 0 = 5 \cdot 0$$

PI:

hipótesis: $7^k - 2^k = 5q$ para algún natural q

tesis: $7^{k+1} - 2^{k+1} = 5q'$ para algún natural q'

$$\begin{aligned}
7^{k+1} - 2^{k+1} &= 7 \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k \\
&= (5+2)7^k - 2 \cdot 2^k \\
&= 5 \cdot 7^k + 2 \cdot 7^k - 2 \cdot 2^k \\
&= 5 \cdot 7^k + 2(7^k - 2^k) \\
&= 5 \cdot 7^k + 2 \cdot 5q \\
&= 5(7^k + 2q)
\end{aligned}$$