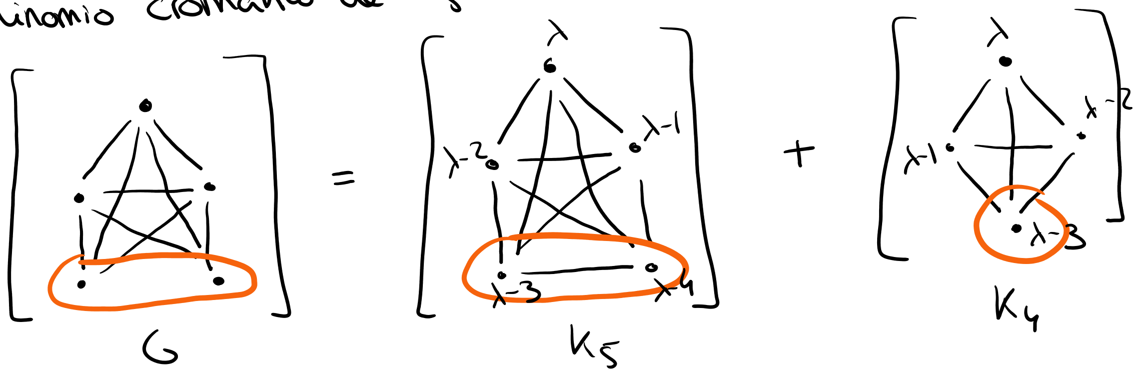
Formas de calcular $P_G(\lambda)$:

* regla del producto
* agregado/quitado de una arista + contracción

ejercicio 9

* polinomio cromático de K_5 menos una arista



$$P_{K_5}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$$

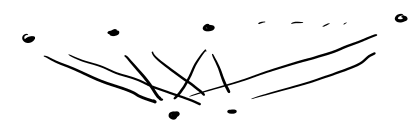
$$P_{K_4}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$\begin{aligned} P_G(\lambda) &= P_{K_5}(\lambda) + P_{K_4}(\lambda) \\ &= \overline{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}(\lambda-4) + \overline{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}\cdot 1 \\ &= \overline{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}(\lambda-4+1) \\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)^2 \end{aligned}$$

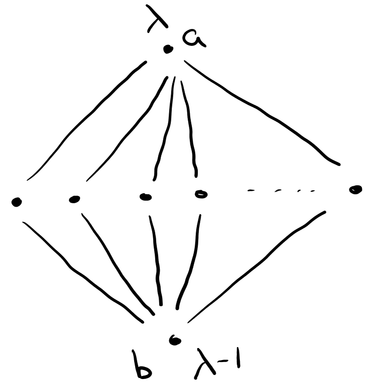
$$\chi(G) = \min\{\lambda \in \mathbb{N} : P_G(\lambda) > 0\}$$

$$\left.\begin{aligned} P_G(1) &= 0 \\ P_G(2) &= 0 \\ P_G(3) &= 0 \\ P_G(4) &= 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1^2 = 24 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \chi(G) = 4$$

$P_G(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 0$

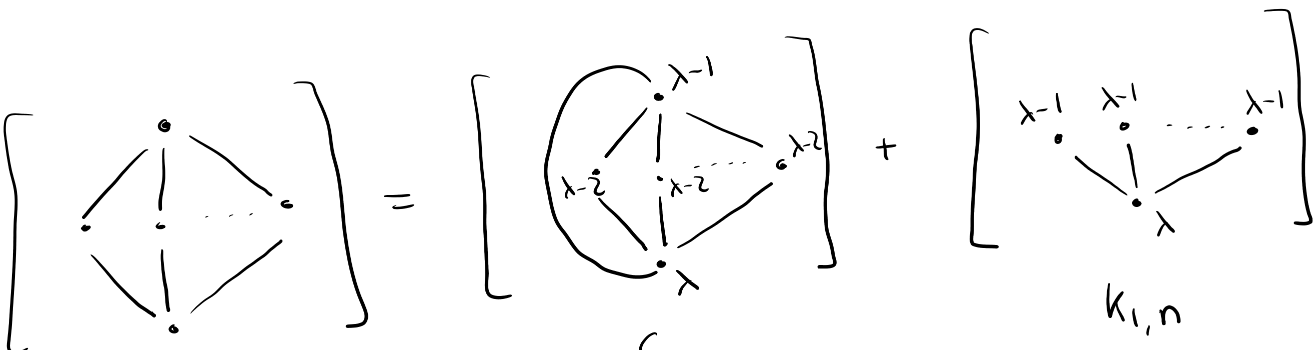


* polinomio cromático de $K_{2,n}$

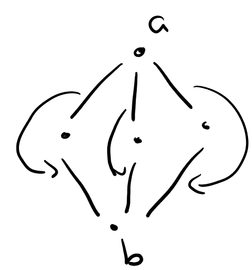


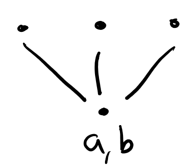
* a y b del mismo color
→ hay $\lambda-1$ posibilidades para los n vertices del medio

* a y b no son del mismo color
→ hay $\lambda-2$ posibilidades para los n vertices del medio



$K_{2,n}$ G $K_{1,n}$





$$P_{K_{1,n}}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^n$$

$$P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^n$$

$$P_{K_{2,n}}(\lambda) = P_G(\lambda) + P_{K_{1,n}}(\lambda)$$
$$= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^n + \lambda(\lambda-1)^n$$

$\Rightarrow \chi(K_{2,n}) =$

$P_{K_{2,n}}(1) = 0$, $P_{K_{2,n}}(2) = \underbrace{2(2-1)(2-2)^n}_{=0} + 2(2-1)^n = 2$

$\Rightarrow \chi(K_{2,n}) = 2$

Otra forma de calcular $P_G(\lambda)$:

teorema: $G=(V,E)$ un grafo

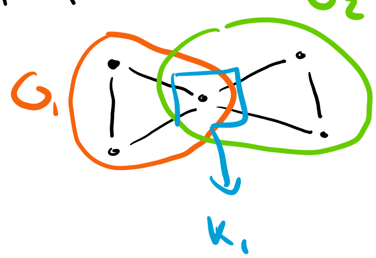
si G tiene dos subgrafos G_1 y G_2 tales que:

- $G_1 \cup G_2 = G$
- $G_1 \cap G_2 = K_n$ para algún n

entonces

$$P_G(\lambda) = \frac{P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda)}{P_{K_n}(\lambda)}$$

ejemplo:



$G_1 \cup G_2 = G$ $\quad$ G_1 y G_2 son C_3

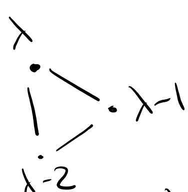
$G_1 \cap G_2 = K_1$

$$P_G(\lambda) = \frac{P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda)}{\lambda}$$

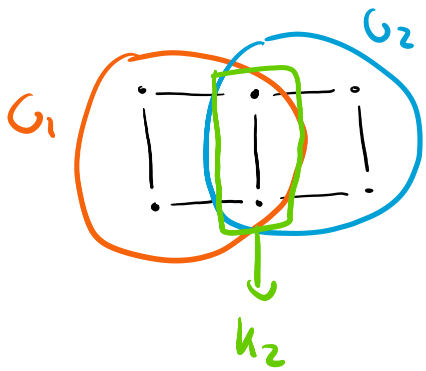
$$= \frac{P_{C_3}(\lambda) \cdot P_{C_3}(\lambda)}{\lambda}$$

$$= \frac{\cancel{\lambda}(\lambda-1)(\lambda-2)\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{\cancel{\lambda}}$$

$$= \lambda(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$$



$P_{G_1}(\lambda)$

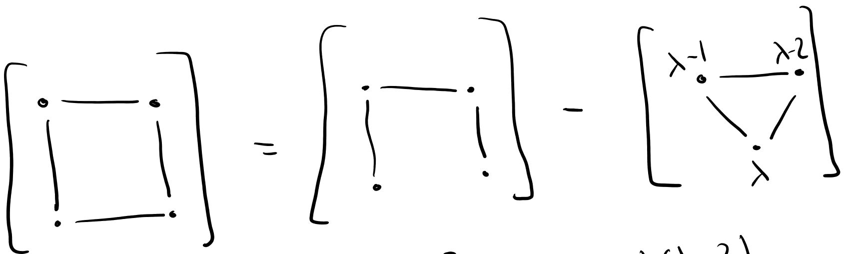


$G_1 \cup G_2 = G$

$G_1 \cap G_2 = K_2$

G_1 y G_2 son C_4

$$P_G(\lambda) = \frac{P_{G_1}(\lambda) \cdot P_{G_2}(\lambda)}{\lambda(\lambda-1)}$$



$$= \lambda(\lambda-1)^3 - \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$P_G(\lambda) = \frac{(P_{C_4}(\lambda))^2}{\lambda(\lambda-1)} = \frac{(\lambda(\lambda-1)^3 - \lambda(\lambda-1)(\lambda-2))^2}{\lambda(\lambda-1)}$$

$$= \frac{(\lambda(\lambda-1))^2((\lambda-1)^2 - (\lambda-2))^2}{\lambda(\lambda-1)}$$

$$= \lambda(\lambda-1)((\lambda-1)^2 - (\lambda-2))^2$$

$$P_G(2) = 2 \cdot 1(1^2 - (2-2))^2 = 2$$

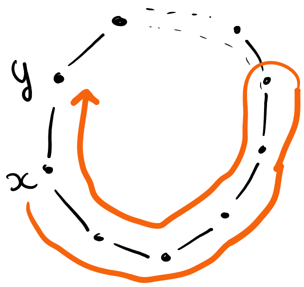
Segundo parcial - julio 2022

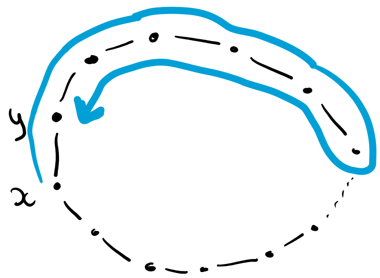
Múltiple Opción 5

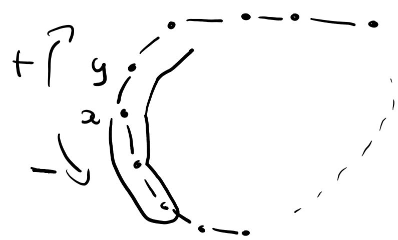
Sea (x, y) una arista de C_{20}. ¿Cuántos caminos de largo 11 inician en x y terminan en y?

A) $\binom{11}{2}$; B) $\binom{11}{4}$; C) $\binom{11}{6}$; D) $\binom{11}{8}$.

cantidad de caminos de largo 11 que empiezan en x y terminan en y







$x \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{} y$

palabra con 11 letras con los caracteres + y −

→ 5 − y 6 +

$$\frac{11!}{5!\,6!} = \frac{11!}{5!\,(11-6)!} = C^{11}_{5}$$

$$\frac{11!}{5!\,6!} = \frac{11!}{(11-6)!\,6!} = C^{11}_{6}$$

Múltiple Opción 1
¿Cuántas relaciones de equivalencia en $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ cumplen que $\#[6] = 4$?
A) 80; B) 100; C) 120; D) 140.

relaciones de equivalencia

$\left.\begin{array}{l}\#[6] \\ |[6]|\end{array}\right\}$ cantidad de elementos de $[6]$

* reflexiva: aRa
* simétrica: $aRb \Rightarrow bRa$
* transitiva: aRb y $bRc \Rightarrow aRc$

clase de equivalencia de a: $[a] = \{b \in A : aRb\}$

$[a] = \{a, \dots\}$

$A = \{1, 2, 3, \overbrace{4, 5, 6, 7}^{[6]}\}$

relaciones de equivalencia con $\#[6] = 4$

$[6] = \{6, x, y, z\}$

$\rightarrow$ la cantidad de formas de elegir x, y, z es C^6_3

caso 1: hay 2 clases de equivalencia: la clase del $[6]$ y una clase con 3 elementos

$\rightarrow$ elegimos los elementos que están en la clase del 6: C^6_3

$\rightarrow$ los tres elementos que quedan va a la misma clase

total del caso 1: $C^6_3 = 20$

caso 2: hay 3 clases de equivalencia: la clase del $[6]$, una clase con un elemento y una clase con dos elementos

$\rightarrow$ elegimos los elementos de $[6]$: C^6_3 formas

$\rightarrow$ elegimos el elemento que está en la clase que tiene un solo elemento: 3 formas

($\rightarrow$ los elementos que sobran van a la clase que tiene dos elementos: 1 forma) total de este caso: $3 \cdot 20 = 60$

caso 3: hay 4 clases de equivalencia: la clase del 6 y tres clases con un solo elemento

$\longrightarrow$ elegimos los elementos de la clase del 6: 20 formas

$\longrightarrow$ los tres elementos que sobran forman las otras tres clases

total de este caso: 20

por la regla de la suma hay $20+60+20=100$ clases de equivalencia

Segundo parcial - noviembre 2022

Múltiple Opción 1

¿Cuántas relaciones de equivalencia existen sobre $\{1,\ldots,7\}$ tales que $|[1]| > |[2]| > |[3]|$?

A) 15; B) 16; C) 17; D) 18.

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$[3] = \{3, \ldots\}$ $|[3]| \geq 1$

$|[3]| < |[2]| < |[1]|$

$\begin{array}{ccc} & & 3 \\ 1 & 2 & \\ & & 4 \end{array}$

$|[2]| < |[1]| \Rightarrow [2] \neq [1]$

$\Rightarrow 1 \not R 2$

caso 1: $|[3]| = 1$, $|[2]| = 2$, $|[1]| = 3$ y hay otra clase con un solo elemento

$[3] = \{3\}$

$[2] = \{2, x\}$ posibilidades para x: 4

$[1] = \{1, y, z\}$ $y, z \neq x$

$[w] = \{w\}$ posibilidades para w: 3

total del caso 1: $4 \cdot 3 = 12$

caso 2: $|[3]| = 1$, $|[2]| = 2$, $|[1]| = 4$

$[3] = \{3\}$

$[2] = \{2, x\}$ posibilidades para x: 4

$[1] = \{1, y, z, w\}$

total del caso 2: 4

Por la regla de la suma hay $12 + 4 = 16$ relaciones de equivalencia

orden de divisibilidad

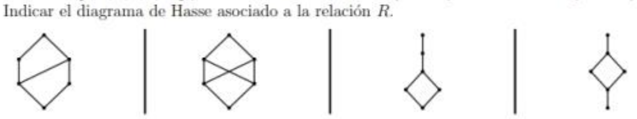
aRb si a divide a b

relación modulo n:

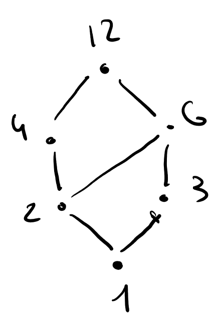
$a \equiv b \pmod n$ si $a - b$ es multiplo de n

Múltiple Opción 6

Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ y R el orden de divisibilidad (aRb si y solo si b es múltiplo de a).
Indicar el diagrama de Hasse asociado a la relación R.



A) B) C) D)



aRb si a divide a b