

Coloración

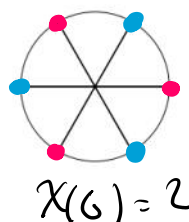
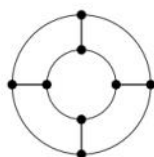
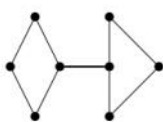
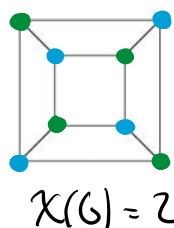
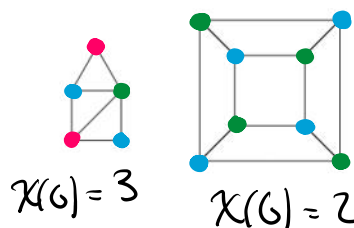
$G = (V, E)$ un grafo

Una ^{buena coloración} _{coloración propia} de G es una forma de colorear los vértices de G de forma que no haya dos vértices adyacentes del mismo color.

el número cromático de G es la mínima cantidad de colores que se necesitan para una buena coloración de G

$$\chi(G) = \text{número cromático de } G$$

Ejercicio 8 Encontrar el número cromático de los siguientes grafos.

Polinomio cromático

$G = (V, E)$

¿de cuántas formas podemos colorear G con λ colores (no es necesario usarlos todos)?

$P_G(\lambda) = \text{cantidad de formas de colorear } G \text{ con } \lambda \text{ colores}$
polinomio en λ coloración propia

$P_G(\lambda) = 0 \Leftrightarrow$ no se puede colorear a G con λ colores

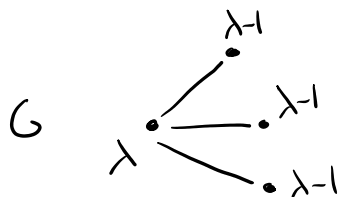
$\chi(G) =$ mínima cantidad de colores para una coloración propia

$$\chi(G) = \min \{ \lambda \in \mathbb{N} : P_G(\lambda) > 0 \}$$

= menor λ tal que $P_G(\lambda) > 0$

Formas de calcular $P_G(\lambda)$:

* usando la regla del producto



$$P_G(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^3$$

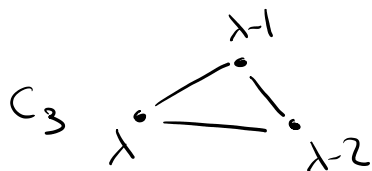
$$P_G(1) = 0$$

$$P_G(2) = 2 \Rightarrow \chi(G) = 2$$

cantidad de
coloraciones
distintas con
2 colores

$$P_G(3) = 3 \cdot 2^3 = 24$$

cantidad de
coloraciones
distintas con
3 colores



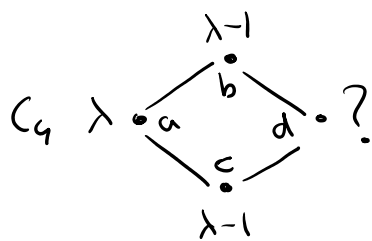
$$P_{C_3}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

$$P_{C_3}(1) = 0$$

$$P_{C_3}(2) = 0$$

$$P_{C_3}(3) = 6 \Rightarrow \chi(C_3) = 3$$

* agregado y contracción de una arista



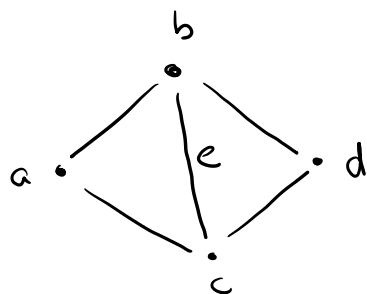
* si b y c son del mismo color

$\Rightarrow$ hay $\lambda-1$ posibilidades para colorear d

* si b y c son de colores diferentes

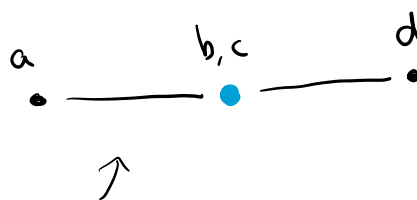
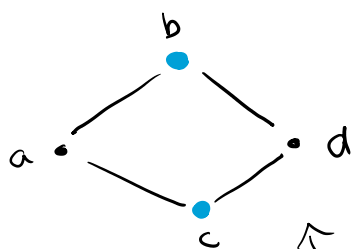
$\Rightarrow$ hay $\lambda-2$ posibilidades para colorear d

Caso 1: b y c son de colores diferentes



podemos agregar la arista e sin cambiar la cantidad de coloraciones

Caso 2: b y c son del mismo color



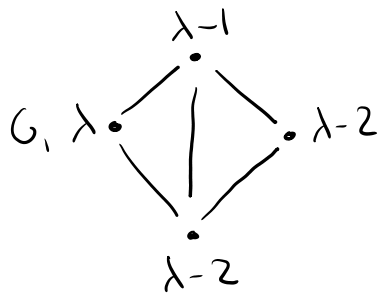
↑
estos dos grafos
tienen la misma cantidad de coloraciones

Por la regla de la suma

$$\left[\begin{array}{c} \text{graph with 5 vertices} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{graph with 5 vertices and edge e} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{graph with 3 vertices} \end{array} \right]$$

agregamos una
arista

contraemos la
arista que agregamos



$$P_{G_1}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$



$$P_{G_2}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$$

$$P_{C_4}(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) + P_{G_2}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)^2 + \lambda(\lambda-1)^2$$

$$P_{C_4}(1) = 0$$

$$P_{C_4}(2) = 2 \Rightarrow \chi(C_4) = 2$$

* agregado y contracción de una arista

$$\left[\text{Diamond Graph} \right] = \left[\text{Diamond Graph with added edge} \right] + \left[\text{Diamond Graph with contracted edge} \right]$$

agrego una arista

contraemos una arista

* quitado y contracción de una arista

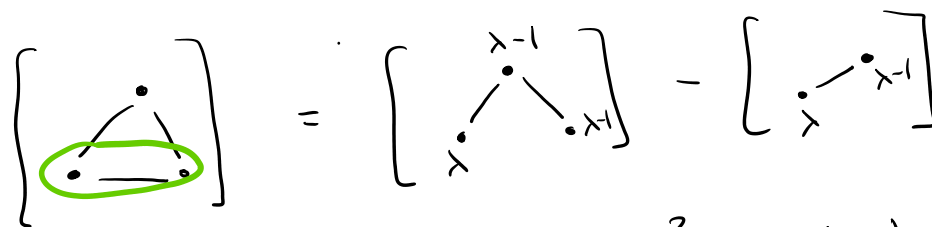
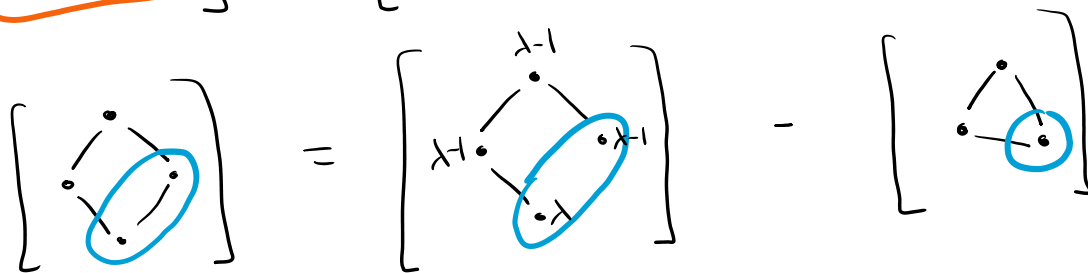
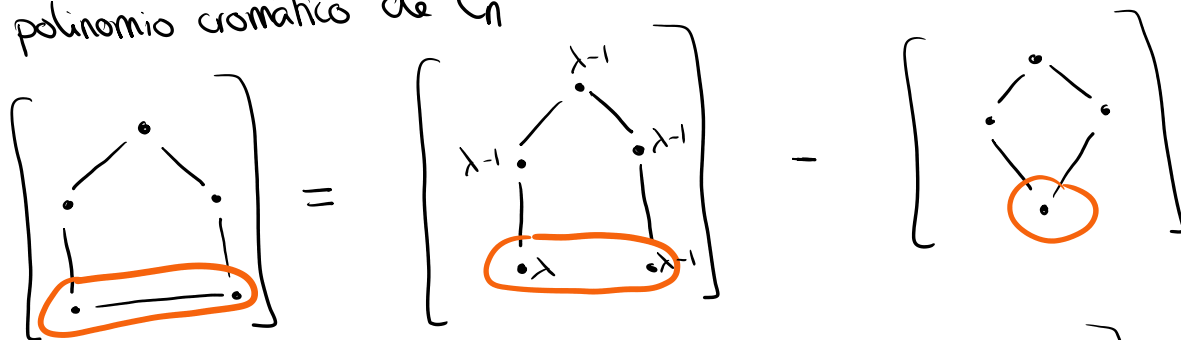
$$\left[\text{Diamond Graph} \right] = \left[\text{Diamond Graph with removed edge} \right] - \left[\text{Diamond Graph with contracted removed edge} \right]$$

quitamos una arista

contraemos la arista que quitamos

Ejercicio 9

* polinomio cromático de C_n



$$P_{C_3}(\lambda) = P_{K_3}(\lambda) - P_{P_2}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2 - \lambda(\lambda-1) \rightarrow P_{C_3}(2) = 0 \quad \chi(C_3) = 3$$

$$P_{C_4}(\lambda) = P_{K_4}(\lambda) - P_{C_3}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^3 - \lambda(\lambda-1)^2 + \lambda(\lambda-1) \rightarrow P_{C_4}(2) = 2 \rightarrow \chi(C_4) = 2$$

$$P_{C_5}(\lambda) = P_{K_5}(\lambda) - P_{C_4}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^4 - \lambda(\lambda-1)^3 + \lambda(\lambda-1)^2 - \lambda(\lambda-1) \rightarrow P_{C_5}(2) = 0 \rightarrow P_{C_5}(3) \neq 0$$

$$P_{C_n}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1} - \lambda(\lambda-1)^{n-2} + \lambda(\lambda-1)^{n-3} - \dots \pm \lambda(\lambda-1)$$

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 3 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$