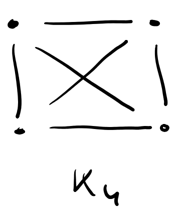
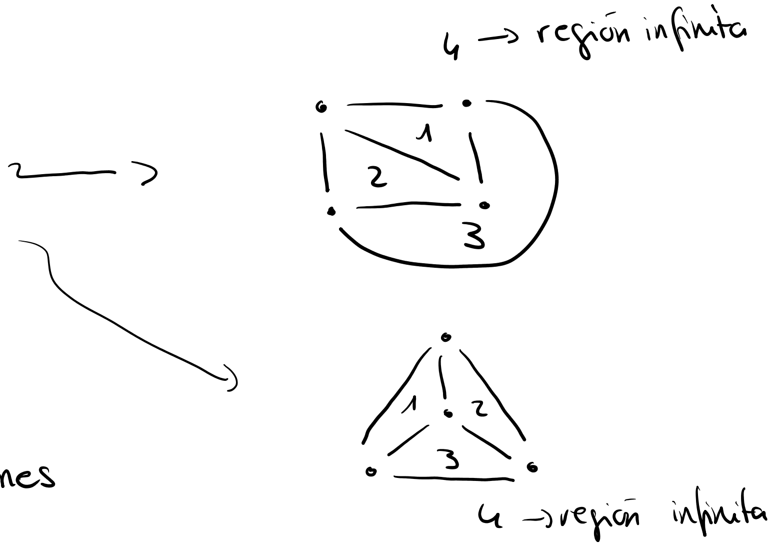
PRACTICO 10

Regiones de un grafo plano

G grafo plano

las regiones que quedan delimitadas por las aristas en una inmersión plana del grafo





K_4 tiene 4 regiones

Formula de Euler

G grafo simple, plano y conexo

v = cantidad de vertices

e = cantidad de aristas

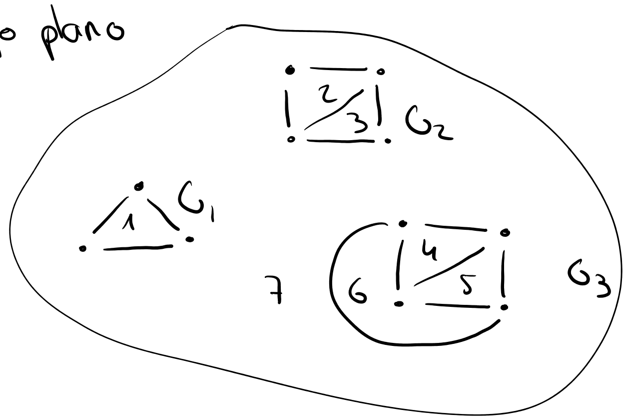
r = cantidad de regiones

$$\boxed{v - e + r = 2}$$

Ejercicio 4

Generalizar el Teorema de las regiones de Euler: probar que todo grafo plano $G = (V, E)$ con κ componentes conexas verifica que $|V| - |E| + r = \kappa + 1$.

G grafo plano



G_1 tiene 2 regiones
G_2 tiene 3 regiones
G_3 tiene 4 regiones

la región infinita la estamos contando tres veces

Sean $G_1, G_2, \dots, G_k$ las componentes conexas de G

cada G_i es un grafo simple y conexa

entonces: $v_i - e_i + r_i = 2$

$|V| = v_1 + v_2 + \dots + v_k$

$|E| = e_1 + e_2 + \dots + e_k$

$r = r_1 + r_2 + \dots + r_k - (k-1) \Rightarrow r_1 + r_2 + \dots + r_k = r + (k-1)$

$v_1 - e_1 + r_1 = 2$

$v_2 - e_2 + r_2 = 2$

$v_3 - e_3 + r_3 = 2$

$v_i - e_i + r_i = 2$

$$\Rightarrow \underbrace{v_1 + v_2 + \dots + v_k}_{|V|} \underbrace{- e_1 - e_2 - \dots - e_k}_{-|E|} + \underbrace{r_1 + r_2 + \dots + r_k}_{r + (k-1)} = 2k$$

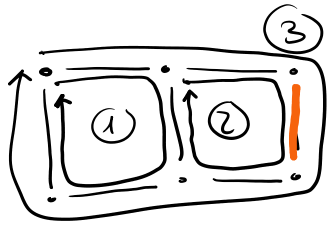
$\Rightarrow |V| - |E| + r + (k-1) = 2k$

$\Rightarrow |V| - |E| + r = 2k - (k-1) = 2k - k + 1 = k + 1$

$$\boxed{|V| - |E| + r = k + 1}$$

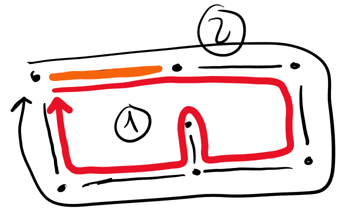
Grado de una región de un grafo plan

$gr(R)$ = longitud del camino cerrado que delimita la región



la región ① tiene grado 4

la región ③ tiene grado 6



la región ② tiene grado 6

la región ① tiene grado 8

$\sum gr(R) = 6+8 = 14$

$e = 7$

cada arista aporta → 1 al grado de dos regiones distintas

o

→ 2 al grado de una región

$$\sum gr(R) = 2\underbrace{e}_{\text{cantidad de aristas del grafo } G}$$

* $\sum \overbrace{gr(v)}^{\text{grado de los vertices}} = 2e$ ✓
* si G es plano, simple y conexo: $v - e + r = 2$ ✓ (formula de Euler)

$$\sum \underbrace{gr(R)}_{\text{grado de las regiones}} = 2e$$

todos los vertices tienen grado 3

Ejercicio 5

Hallar la menor cantidad de vértices que puede tener un grafo simple, plano, conexo y 3-regular, tal que cada una de sus regiones tiene al menos 5 vértices.

G un grafo como en la letra

* G es simple, plano y conexo

$\Rightarrow$ verifica la formula de Euler: $v - e + r = 2$

* G es 3-regular

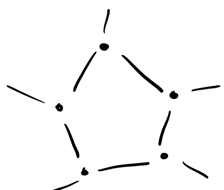
$\Rightarrow gr(v) = 3$ para todo vertice

$$\sum \underbrace{gr(v)}_{=3} = 2e$$

$$\Rightarrow 3v = 2e$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{3}{2}v}$$

* cada región tiene al menos cinco vertices



grado = 5

grado = 6

$$\Rightarrow gr(R) \geq 5$$

$$5r \leq \sum \underbrace{gr(R)}_{\geq 5} = 2e$$

$$\underbrace{gr(R_1)}_{\geq 5} + \underbrace{gr(R_2)}_{\geq 5} + \dots + \underbrace{gr(R_r)}_{\geq 5} = 2e$$

$$5r \leq 2e = 3v \quad \Rightarrow 5r \leq 3v \Rightarrow \boxed{r \leq \frac{3}{5}v}$$

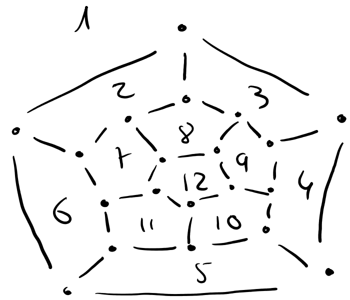
$$5r \leq 2e = 2 \cdot \frac{3}{2}v = 3v$$

* reemplazamos todo en la fórmula de Euler

$$2 = v - \underbrace{e}_{\frac{3}{2}v} + \underbrace{r}_{\leq \frac{3}{5}v} \leq v - \frac{3}{2}v + \frac{3}{5}v = \frac{10v - 15v + 6v}{10} = \frac{1}{10}v$$

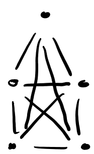
$$2 \leq \frac{1}{10}v \Rightarrow \boxed{20 \leq v}$$

la menor cantidad de vertices es 20



Ejercicio 6
Demostrar que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.

* G grafo plano, simple, conexo con $|V| \geq 3$, entonces $e \leq 3v - 6$



K_5

$v = 5$
$e = 10$

$\underset{10}{\overset{\shortparallel}{e}} \leq \underbrace{3v-6}_{9}$

$10 \leq 9$ Absurdo

$\Rightarrow K_5$ no es plano

* G grafo plano con $|V| \geq 3$
querernos ver que G tiene un vertice de grado ≤ 5
Supongamos por absurdo que todos los vertices tienen grado ≥ 6

$6v \leq \sum gr(v) = 2e \quad \Rightarrow 6v \leq 2e$
$\Rightarrow \boxed{3v \leq e}$

$6(v-1)+5$

G es plano y $|V| \geq 3 \Rightarrow e \leq 3v - 6$

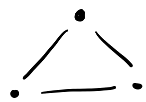
entonces $3v \leq 3v - 6$
$\Rightarrow 0 \leq -6$ Absurdo!

* $\sum gr(v) = 2e$
* planos, simples y conexos
$v - e + r = 2$
$\sum gr(R) = 2e$

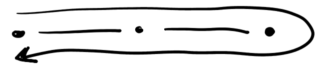
Vamos a probar que

G grafo simple, plano y conexo con $|V| \geq 3$ entonces $e \leq 3v - 6$

* vale la formula de Euler: $v - e + r = 2$
* como $|V| \geq 3$



2 regiones de grado 3



1 región de grado 4

$\Rightarrow gr(R) \geq 3$

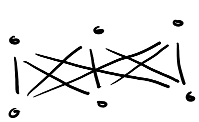
$3r \leq \sum gr(R) = 2e \Rightarrow \boxed{3r \leq 2e}$

* $2 = v - e + r \Rightarrow 6 = 3v - 3e + 3r$

$\Rightarrow 6 \leq 3v - 3e + 2e$

$\Rightarrow 6 \leq 3v - e$

$\Rightarrow \boxed{e \leq 3v - 6}$



$K_{3,3}$

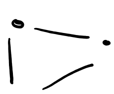
$v = 6$

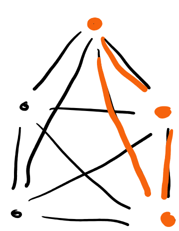
$e = 9$

$\underset{9}{\overset{\|}{e}} \leq \underbrace{3v - 6}_{\overset{\|}{12}}$

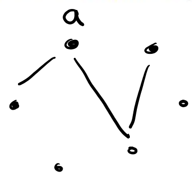
Ejercicio 8

(a) Determinar la cantidad de triángulos que tiene K_n.



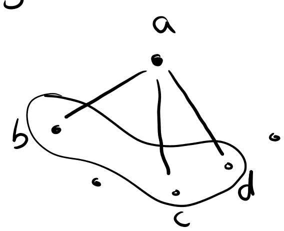


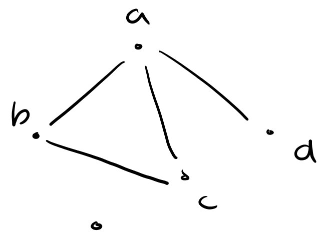
Ejercicio 12 Demostrar que en una reunión de 6 personas cualesquiera siempre existen al menos 3 personas que se conocen entre sí o al menos 3 personas que no se conocen ninguna de ellas (pueden ocurrir ambas).



* si $gr(a) \geq 3$

en G





podrían faltar muchas

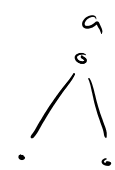
b, c y d adyacentes a a

$\longrightarrow$ si no hay dos entre $\overline{\text{b, c y d}}$ que sean adyacentes

$\Longrightarrow$ 3 personas que no se conocen

$\longrightarrow$ si b y c son adyacentes

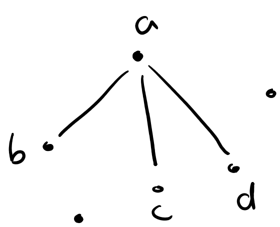
$\Longrightarrow$ 3 personas que se conocen



* $gr(a) \leq 2$ en G

$\Longrightarrow$ $gr(a) \geq 3$ en $\overline{G}$

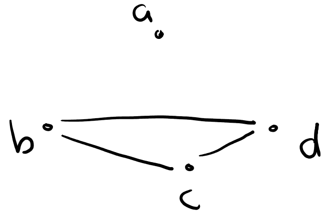
en $\overline{G}$



faltan aristas

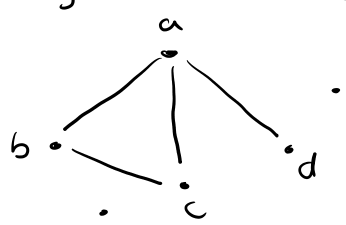
$\longrightarrow$ si no hay dos entre b, c y d que sean adyacentes

en G

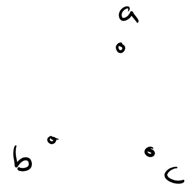


3 personas que se conocen

→ si b y c son adyacentes en $\bar{G}$



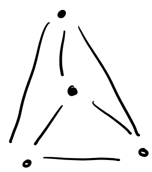
en $\bar{G}$



en G

3 personas que no se conocen

W_4



W_5