PRACTICO 1

Inducción fuerte

Sea $P(n)$ una propiedad sobre un natural n

→ una demostración de que $P(n)$ vale para todo natural n tiene dos etapas

caso base: verificar que se cumplen $P(0), P(1), P(2), \ldots P(i)$

paso inductivo:

hipótesis inductiva: suponemos que valen $P(k), P(k-1), P(k-2), \ldots, P(k-i)$

tesis inductiva: probamos $P(k+1)$

Ejercicio 6
Probar que si $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$ y $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \; \forall n \geq 1$ entonces $a_n \geq 3^n, \; \forall n \geq 1$.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \ldots\}$

$a_1 = 3$

$a_2 = 10$

$a_3 = 30$

$a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \quad , n \geq 1$

$$a_{\underset{\underset{1+3}{\uparrow}}{\underline{\textcircled{4}}}}^{\nearrow k+1} = 2a_{\textcircled{3}}^{\nearrow k} + 7a_{\textcircled{2}}^{\nearrow k-1} + a_{\textcircled{1}}^{\nearrow k-2} \rightsquigarrow a_{k+1} = 2a_k + 7a_{k-1} + a_{k-2}$$

$$\underset{\overset{\uparrow}{2+3}}{a_{\underline{5}}} = 2a_4 + 7a_3 + a_2$$

$$\underset{3+3}{a_{\underline{6}}} = 2a_5 + 7a_4 + a_3$$

Queremos probar que $a_n \geqslant 3^n$ para todo $n \geq 1$

Sea $P(n): a_n \geqslant 3^n$

Vamos a probar que $P(n)$ se cumple para todo $n \geqslant 1$ usando inducción fuerte.

Caso base: vamos a considerar tres casos base

- si $n=1$: $a_1 = 3 \geqslant 3^1 = 3$ ✓
- si $n=2$: $a_2 = 10 \geqslant 9 = 3^2$ ✓
- si $n=3$: $a_3 = 30 \geqslant 27 = 3^3$ ✓

Paso inductivo:

hipótesis inductiva: suponemos que valen $P(k)$, $P(k-1)$ y $P(k-2)$

- $P(k): a_k \geqslant 3^k$
- $P(k-1): a_{k-1} \geqslant 3^{k-1}$
- $P(k-2): a_{k-2} \geqslant 3^{k-2}$

tesis inductiva: queremos probar que vale $P(k+1)$

es decir que se cumple $\boxed{a_{k+1} \geqslant 3^{k+1}}$

$$a_{k+1} = 2\underbrace{a_k}_{\substack{\geq 3^k \\ \text{por HI}}} + 7\underbrace{a_{k-1}}_{\substack{\geq 3^{k-1} \\ \text{por HI}}} + \underbrace{a_{k-2}}_{\substack{\geq 3^{k-2} \\ \text{por HI}}}$$

$$a_{k+1} \geq 2\cdot 3^k + 7\cdot 3^{k-1} + 3^{k-2} \overset{?}{\geq} 3^{k+1}$$

Concluimos probando que $2\cdot 3^k + 7\cdot 3^{k-1} + 3^{k-2} \geq 3^{k+1}$

$$2\cdot 3^k + 7\cdot 3^{k-1} + 3^{k-2} \overset{?}{\geq} 3^{k+1} \iff 2\cdot \underbrace{3^{k-2}}\cdot 3^2 + 7\cdot \underbrace{3^{k-2}}\cdot 3 + \underbrace{3^{k-2}} \overset{?}{\geq} 3^{k+1}$$

$$\iff \cancel{3^{k-2}}(2\cdot 3^2 + 7\cdot 3 + 1) \overset{?}{\geq} \cancel{3^{k-2}}\cdot 3^3$$

$$\iff 40 \geq 27 \checkmark$$

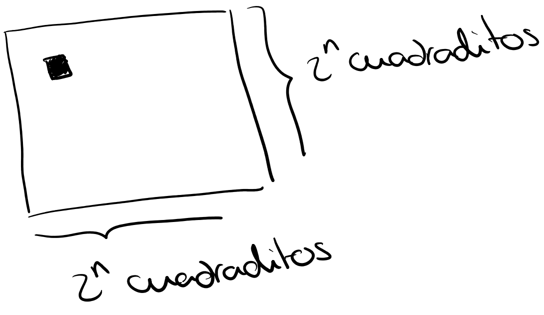
Entonces tenemos que

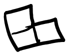
$$a_{k+1} \geq 2\cdot 3^k + 7\cdot 3^{k-1} + 3^{k-2} \geq 3^{k+1}$$

Por lo tanto $a_{k+1} \geq 3^{k+1}$.

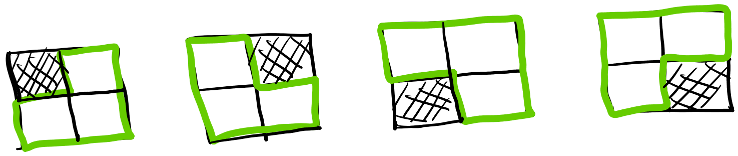
Ejercicio 5

Sea n un número natural tal que $n \geq 1$. Consideremos un tablero cuadrado compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demostrar que es posible cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.



consideramos piezas 

Caso base: si $n=1$

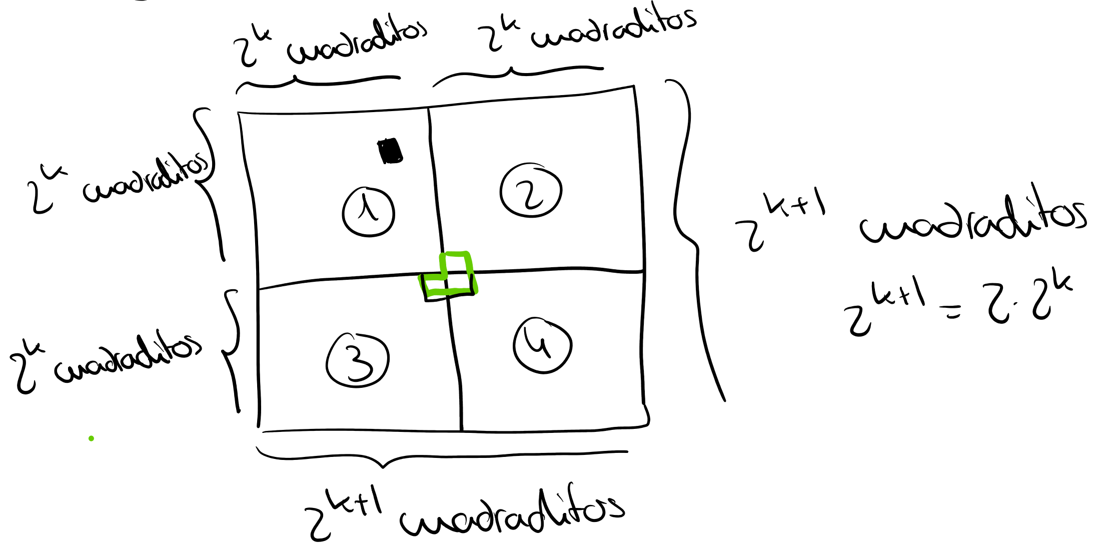


Paso inductivo:

hipótesis inductiva: si tenemos un tablero $2^k \times 2^k$ al cual le falta un cuadradito, podemos cubrir el tablero con piezas en forma de ▙

tesis inductiva: tenemos un tablero $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ al cual le falta un cuadradito y queremos ver que podemos cubrir el tablero con piezas ▙

Sin pérdida de generalidad suponemos que el cuadradito que falta está en ①

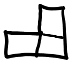


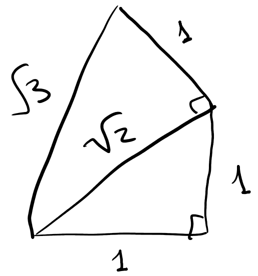
→ ① es un tablero $2^k \times 2^k$ al cual le falta un cuadradito entonces por HI podemos cubrir el tablero ①

→ por HI podemos cubrir ② menos el cuadradito de abajo a la izquierda

→ por HI podemos cubrir ③ menos el cuadrito de arriba a la derecha

→ por HI podemos cubrir ④ menos el cuadradito de arriba a la izquierda

→ los tres cuadraditos que falta cubrir los cubro con una pieza en forma de 

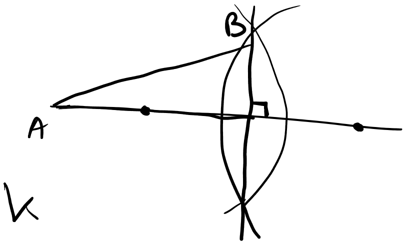


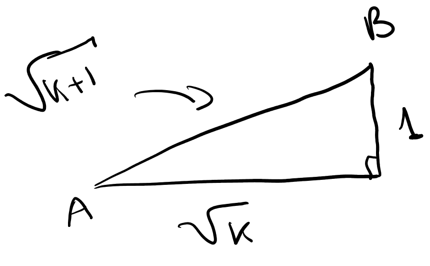
Ejercicio 7
Demostrar que, a partir de un segmento de longitud 1 en el plano, es posible construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{n}$, para todo $n \geq 1$.

caso base: segmento de longitud 1

paso inductivo:

* hipótesis inductiva: podemos construir un segmento de longitud $\sqrt{k}$
* tesis: queremos probar que podemos construir un segmento de longitud $\sqrt{k+1}$





Pitágoras:

$$AB^2 = 1 + k$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{k+1}$$