Inducción completa

* la inducción completa es un método para demostrar propiedades sobre los números naturales

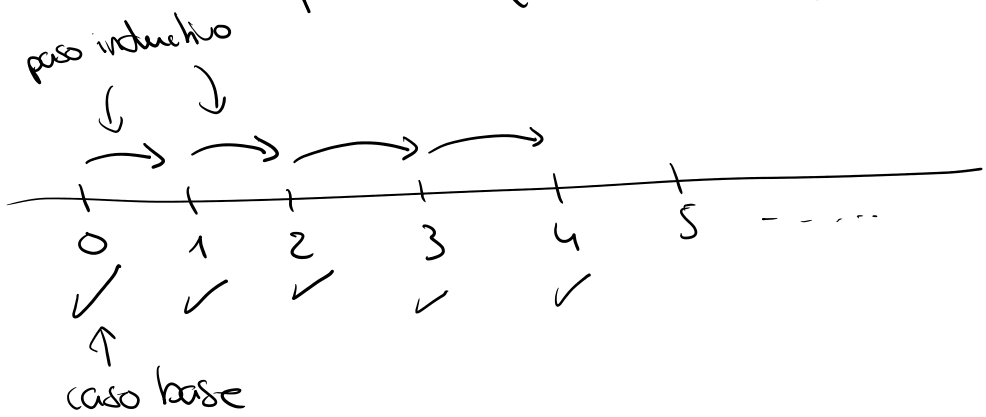
* cuál es la idea?

Sea $P(n)$ una propiedad sobre un numero natural n

Por ejemplo, en el ejercicio 2 : $P(n)$: $7^n - 2^n$ es multiplo de 5

→ una demostración de que $P(n)$ se cumple para todo natural por inducción completa tiene dos etapas

1. caso base: probar que la propiedad se cumple para $n=0$
2. paso inductivo:
   → suponemos que la propiedad se cumple para un natural generico k (hipótesis inductiva)
   → demostramos que la propiedad se cumple para $k+1$ (tesis inductiva)



Ejercicio 1
Probar de dos formas distintas que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo natural n.

$$\sum_{i=0}^{4} i = 0+1+2+3+4$$

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0+1+2+3+4+\dots+n$$

$$\sum_{i=0}^{3} i^2 = 0^2+1^2+2^2+3^2$$

Sea $P(n)$: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Vamos a probar que $P(n)$ se cumple para todo natural n por inducción completa

Caso base: si $n=0$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=0}^{0} i &= 0 \\ \frac{0(0+1)}{2} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sum_{i=0}^{0} i = \frac{0(0+1)}{2} \checkmark$$

Paso inductivo:

* hipótesis inductiva: $\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$
* queremos probar que $\sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$\sum_{i=0}^{k+1} i = \underbrace{0+1+2+3+\dots+k}+(k+1)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} i + (k+1)$$

$$HI \rightarrow = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2}$$ por la hipótesis inductiva

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$ ✓

$$(k+1)(k+2) = (k+1)k + (k+1)2$$

$$S = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 0$$

$$2S = \underbrace{100 + 100 + 100 + 100 + \dots + 100}_{101 \text{ términos}}$$

$$2S = 100 \cdot 101$$

$$S = \frac{100 \cdot 101}{2}$$

Ejercicio 4

Probar que para todo natural a existe un natural k tal que $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = 9k$.

Sea $P(a)$: existe un natural k tal que $a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 = 9k$

Vamos a probar que $P(a)$ se cumple para todo natural a por inducción completa

caso base: si $a = 0$

$$0^3 + (0+1)^3 + (0+2)^3 = 0^3 + 1^3 + 2^3 = 9 = 9 \cdot 1$$ ✓

Paso inductivo:

* hipótesis inductiva: existe un natural k' tal que

$$b^3 + (b+1)^3 + (b+2)^3 = 9k'$$ (donde b es un natural)

* queremos probar que existe un natural m tal que

$$(b+1)^3 + (b+2)^3 + (b+3)^3 = 9m$$

$$(b+1)^3 + (b+2)^3 + (b+3)^3 = (b+1)^3 + (b+2)^3 + (b+3)(b+3)^2$$

$$= (b+1)^3 + (b+2)^3 + (b+3)(b^2 + 6b + 9)$$

$$= (b+1)^3 + (b+2)^3 + b^3 + 6b^2 + 9b + 3b^2 + 18b + 27$$

$$= b^3 + (b+1)^3 + (b+2)^3 + 9b^2 + \underbrace{27b}_{9 \cdot 3b} + \underbrace{27}_{9 \cdot 3}$$

por la hipótesis inductiva →

$$= 9k' + 9(b^2 + 3b + 3)$$

$$= 9\underbrace{(k' + b^2 + 3b + 3)}_{\text{es un natural}}$$

---

otra forma de terminar

$$\underbrace{b^3 + (b+1)^3 + (b+2)^3}_{\dot{9} \text{ por HI}} + \underset{\dot{9}}{9b^2} + \underset{\dot{9}}{27b} + \underset{\dot{9}}{27}$$

como la suma de multiplos de 9 es un multiplo de 9 concluimos que $(b+1)^3 + (b+2)^3 + (b+3)^3$ es multiplo de 9