

Julio 2022

Múltiple Opción 1

La cantidad de relaciones de equivalencia que se pueden definir sobre $\{1, 2, 3, 4\}$ es:
A) 14; B) 15; C) 16; D) 17.

Caso 1: hay una sola clase de equivalencia

→ hay una sola relación de equivalencia (todos relacionados con todos)

Caso 2: hay dos clases de equivalencia $\{1, 2\}$ $\{3, 4\}$

hay dos posibilidades

→ dos clases con dos elementos → 3 relaciones (elegir quién está relacionado con 1)

→ una clase con 3 elementos y una clase con 1 elemento → 4 relaciones

Caso 3: tres clases de equivalencia

$\{1, 2\}$ $\{3, 4\}$ $\{ \}$

$\{1, 2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$

$\{1, 2\}$ $\{4\}$ $\{3\}$

$\{1, 2, 3, 4\}$

$\{1, 2\}, \{3, 4\} = \{3, 4\}, \{1, 2\}$

$\{1, 2\}, \{3\}, \{4\} \neq \{3, 4\}, \{1\}, \{2\}$

$\binom{4}{2}$ relaciones de equivalencia

→ elegir los dos elementos que están en la clase con 2 elementos

Caso 4: 4 clases de equivalencia

$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$

→ hay una sola relación de equivalencia

Por la regla de la suma: $1 + 3 + 4 + 6 + 1 = 15$ ✓

$\{1, 2, 3, 4\}$	→ 1
$\{1, 2\}$ $\{3, 4\}$	→ 3
$\{1, 3\}$ $\{2, 4\}$	→ 4
$\{1, 4\}$ $\{2, 3\}$	→ 6
$\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{4\}$	→ 1

Junio 2017

Múltiple Opción 5

Hallar la cantidad de relaciones de equivalencia sobre $\{0, 1, \dots, 7\}$ tales que $\# [0] = 2$ y $\# [1] = 4$.
A) 60; B) 120; C) 180; D) 240.

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \underline{6, 7}\}$

$$\# [0] = 2$$

$$\# [1] = 4$$

$$0 \sim 1 \Leftrightarrow [0] = [1]$$

entonces $0 \not\sim 1$

$$[0] = \{0, x\}$$

$$[1] = \{1, y, z, t\} \quad y, z, t \neq x$$

hay dos elementos que sobran $\rightarrow$ están relacionados
 $\rightarrow$ no están relacionados

Paso 1: elegimos el elemento relacionado con el 0

$$C_1^6 \text{ formas}$$

Paso 2: elegir los 3 elementos relacionados con el 1

$$C_3^5 \text{ formas}$$

Paso 3: elegir que pasa con los 2 elementos que sobran

hay dos formas

$\rightarrow$ estén relacionados $\{0, x\} \{1, y, z, t\} \mid \{s, r\}$
 $\rightarrow$ no estén relacionados $\{0, x\} \{1, y, z, t\} \mid \{s\}, \{r\}$

Por la regla del producto: $C_1^6 \cdot C_3^5 \cdot 2$

$$C_1^6 \cdot C_3^5 \cdot 2 = \frac{6!}{1!5!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} \cdot 2 = 6 \cdot 10 \cdot 2 = 120$$

Junio 2018

MO4: Sea el grafo $G = (V, E)$ con

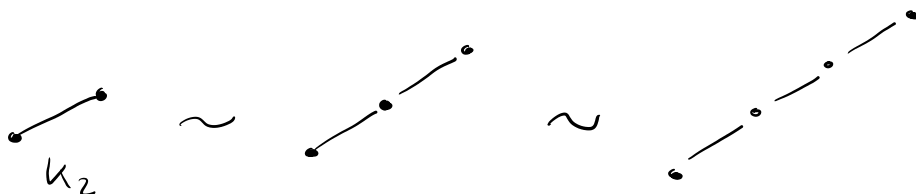
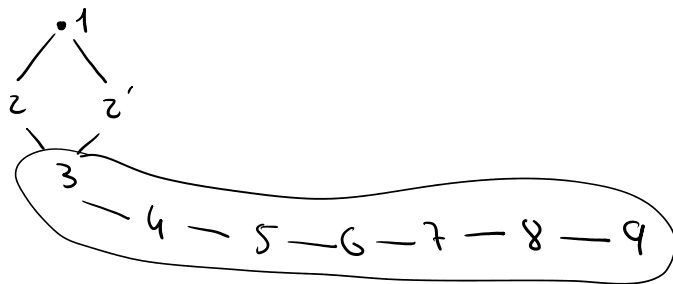
$$V = \{1, 2, 2', 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$E = \{12, 12', 23, 2'3, 34, 45, 56, 67, 78, 89\}.$$

La cantidad de subgrafos de G homeomorfos a K_2 es:

A) 68 B) 69 C) 70 D) 71 E) 72.

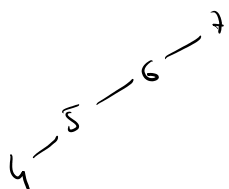
$$12 = (1, 2)$$



los grafos homeomorfos a K_2 son los caminos simples

① subgrafos de $3 - (4) - 5 - 6 - (7) - 8 - 9$ homeomorfos a K_2

hay C_2^7 subgrafos homeomorfos a K_2



② subgrafos homeomorfos a K_2 tales que un extremo es el vertice 1 y el otro extremo está en $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

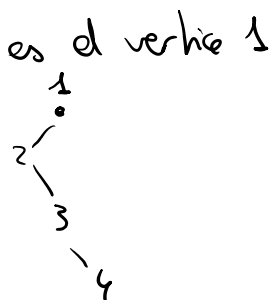
Paso 1: elegir el otro extremo del camino

→ 7 formas

Paso 2: elegir si el camino pasa por 2 o por 2'

→ 2 formas

regla del producto: 14



(3) los subgrafos que empiezan en 2 y terminan en un vértice de $\{3, \dots, 9\}$

paso 1: elegir el vértice donde termina el camino
 $\rightarrow 7$ formas

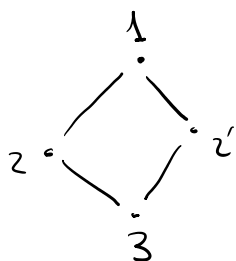
paso 2: elegir si el camino pasa por 1 o no
 $\rightarrow 2$ formas

total: 14

(4) los grafos que empiezan en 2' y terminan en un vértice de $\{3, \dots, 9\}$

total: 14

(5)



caminos en
 $\leftarrow$ este subgrafo

Paso 1: elegir 2 vértices (que no sean el 3)

C_2^3 formas

Paso 2: elegir el camino entre los dos vértices elegidos

2 formas

regla del producto: $C_2^3 \cdot 2 = 6$

Regla de la suma:

$$C_2^7 + 14 \cdot 3 + 6 = 21 + 42 + 6 = 69$$

$$C_2^7 = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{2!5!} = 21$$

$$C_2^7 = \frac{7!}{2!(7-2)!}$$

MO6: Sea el grafo de la figura:



La cantidad de formas de colorearlo con tres colores es:

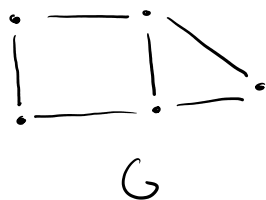
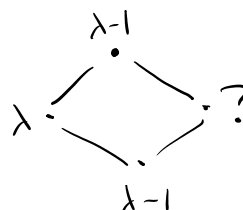
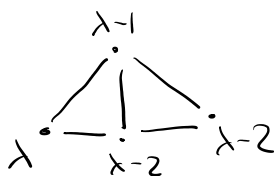
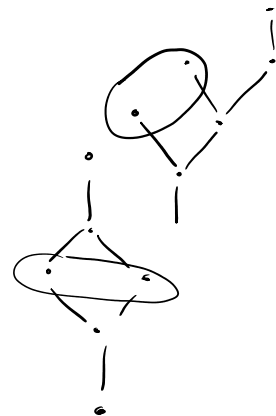
A) 18 B) 19 C) 20 D) 21 E) 22.

Teorema:

G grafo, G_1, G_2 subgrafos

$$G = G_1 \cup G_2 \quad G_1 \cap G_2 = K_n$$

$$\Rightarrow P_G(\lambda) = \frac{P_{G_1}(\lambda) P_{G_2}(\lambda)}{P_{K_n}(\lambda)}$$

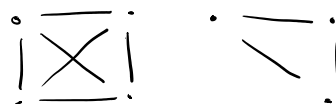


$$G_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}$$

$$G_2 = \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array}$$

$$G_1 \cap G_2 = \begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \end{array}$$

$$P_G(\lambda) = \frac{P_{G_1}(\lambda) P_{G_2}(\lambda)}{P_{K_2}(\lambda)}$$



$$\left[\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \right] = \left[\begin{array}{|c|c|} \hline \lambda-1 & \lambda-1 \\ \hline \lambda-1 & \lambda \\ \hline \end{array} \right] - \left[\begin{array}{|c|} \hline \lambda-1 \\ \hline \lambda-1 \\ \hline \end{array} \right]$$

$$= \lambda(\lambda-1)^3 - \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$$

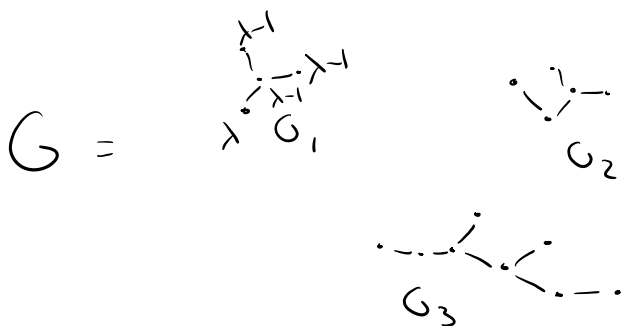
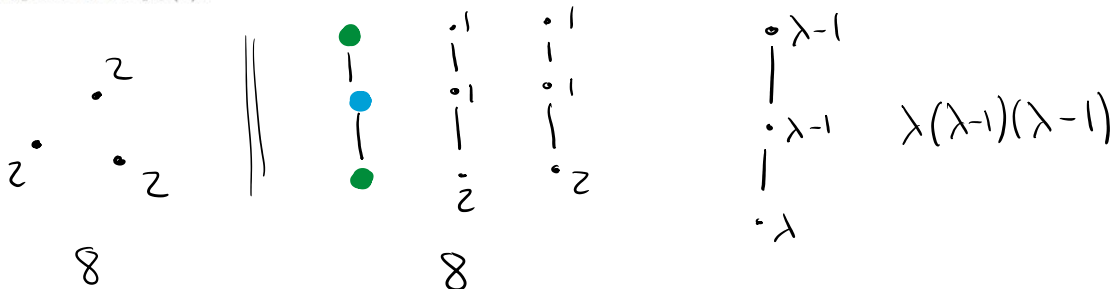


$$P_G(\lambda) = \frac{\overbrace{(\lambda(\lambda-1)^3 - \lambda(\lambda-1)(\lambda-2))}^{P_{G_4}(\lambda)} \overbrace{(\lambda(\lambda-1)(\lambda-2))}^{P_{G_3}(\lambda)}}{\lambda(\lambda-1)}$$

$$P_G(3) = 3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2$$

Múltiple Opción 5

Sea G un grafo simple y acíclico con tres componentes conexas, y sea $p_G(x)$ su polinomio cromático. Entonces: A) $p_G(2) = 4$; B) $p_G(2) = 8$; C) $p_G(2) = 16$; D) No hay datos suficientes para hallar $p_G(2)$.



quiero colorear G con λ colores

Paso 1 coloreo G_1
 $\rightarrow P_{G_1}(\lambda)$ formas

Paso 2: coloreo G_2
 $\rightarrow P_{G_2}(\lambda)$ formas

Paso 3: coloreo G_3
 $\rightarrow P_{G_3}(\lambda)$ formas

G_1, G_2 y G_3 son árboles

$$P_{\text{Arbol}}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^{n-1} \rightarrow \text{cantidad de vértices}$$

$$P_{\text{Arbol}}(2) = 2$$

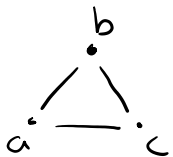
regla del producto

$$P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) P_{G_2}(\lambda) P_{G_3}(\lambda)$$

$$P_G(2) = P_{G_1}(2) P_{G_2}(2) P_{G_3}(2) = 2^3 = 8$$

EJERCICIO 3 La cantidad de caminos de longitud 99 que existen entre dos vértices adyacentes dados de C_3 es:

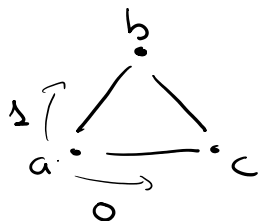
Opciones: A) 2^{98} ; B) 2×3^{97} ; C) $(2^{99} - 1)/3$; D) $(2^{99} + 1)/3$; E) $3 \times (2^{99} + 1)$.



Paso 1: elegir dos vertices adyacentes

3 formas

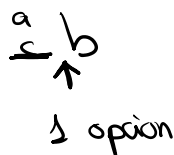
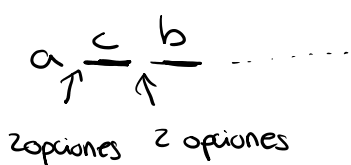
Paso 2: caminos de longitud q entre a y b



1 = movimiento en sentido horario

0 = movimiento en sentido antihorario

a_n = caminos de longitud n entre a y b



Formulas

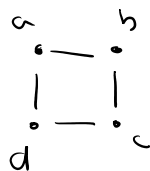
• G grafo: $\sum \text{gr}(v) = 2e$

• G grafo plano conexo: $v - e + r = 2 \leadsto e \leq 3v - 6$

• G grafo plano: $\sum \text{gr}(r) = 2e$

• G arbol: $v = e + 1$

* $G = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = K_n$



$$P_G(\lambda) = \frac{P_{G_1}(\lambda) P_{G_2}(\lambda)}{P_{K_n}(\lambda)}$$