Ejercicio MO4: Cuatro maestras salen de paseo con seis niños y deciden formar tres grupos. ¿Cuántas formas hay de formar los grupos si cada uno debe contar con alguna maestra y algún alumno?

A) $S(4,3)S(6,3)$
B) $Sob(4,3)Sob(6,3)$
C) $S(4,3)Sob(6,3)$
D) Ninguna de las anteriores

2

$\left.\begin{array}{l}\text{4 maestras}\\ \text{6 niños}\end{array}\right\} \longrightarrow$ 3 grupos con por lo menos una maestra y por lo menos un alumno

1. nos ocupamos de las maestras

querermos repartir las 4 maestras en 3 grupos

la cantidad de formas de hacer esto es $S(4,3)$

$$\{M_1, M_2, M_3, M_4\} \longrightarrow \underbrace{\begin{array}{cc} \{M_1\} & \{M_2\} \\ \{M_2\} & \{M_1\} \\ \{M_3, M_4\} & \{M_3, M_4\} \end{array}}_{\text{esto es lo mismo}} \quad \begin{array}{c} \{\ \} \\ \{\ \} \\ \{\ \} \end{array}$$

2. nos ocupamos de los niños

queremos repartir los 6 niños en los 3 grupos que creamos en la parte anterior

$$\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\} \xrightarrow{f} \underbrace{\begin{array}{cc} \{M_1, N_1\} & \{M_1, \\ \{M_2, & \{M_2, N_1 \\ \{M_3, M_4, & \end{array}}_{\text{son casos distintos}}$$

son casos distintos

la cantidad de formas de repartir los niños es $Sob(6,3)$

Por la regla del producto: $S(4,3)\,Sob(6,3)$

$$S(4,3)\,Sob(6,3) = \frac{Sob(4,3)}{3!}\,Sob(6,3)$$

$$= Sob(4,3)\,\frac{Sob(6,3)}{3!}$$

$$= Sob(4,3)\,S(6,3)$$

$$= \underbrace{S(6,3)}_{\text{6 niños en 3 grupos indistinguibles}}\ \underbrace{Sob(4,3)}_{\text{4 maestras en 3 grupos distinguibles}}$$

MO1

Contar la cantidad de subconjuntos de 4 elementos de $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ tales que la distancia entre toda pareja de elementos sea de 3 o más. A) $\binom{94}{3}$; B) $\binom{94}{4}$; C) $\binom{94}{5}$; D) $\binom{94}{6}$.

$$\{x_1 \xrightarrow{+3} x_2 \xrightarrow{+3} x_3 \xrightarrow{+3} x_4\} \quad 1 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le 100$$

$$\begin{array}{lcl} 1 \le x_1 & & 1 \le x_1 \\ 3 \le x_2 - x_1 & & 3 \le x_2 - x_1 \\ 3 \le x_3 - x_2 & \rightsquigarrow & 3 \le x_3 - x_2 \\ 3 \le x_4 - x_3 & & 3 \le x_4 - x_3 \\ x_4 \le 100 & & 0 \le 100 - x_4 \end{array}$$

$$\underbrace{x_1}_{\geq 1} + \underbrace{(x_2 - x_1)}_{\geq 3} + \underbrace{(x_3 - x_2)}_{\geq 3} + \underbrace{(x_4 - x_3)}_{\geq 3} + \underbrace{(100 - x_4)}_{\geq 0} = 100$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 100 \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} y_1 \geq 1 \\ y_2 \geq 3 \\ y_3 \geq 3 \\ y_4 \geq 3 \\ y_5 \geq 0 \end{array}$$

$$3 \leq y_1 \leq 5$$

↑ PIE

tiene la misma cantidad de soluciones que

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 90 \quad \text{con} \quad y_i \geq 0$$

$$CR^{5}_{90} = C^{94}_{90} = \frac{94!}{90!(94-90)!} = \frac{94!}{90!\,4!} = \frac{94!}{4!(94-4)!} = C^{94}_{4}$$

$$CR^{5}_{90} = C^{90+5-1}_{90} = C^{94}_{90} = C^{94}_{4}$$

$$C^{n}_{m} = C^{n}_{n-m}$$

Ejercicio 2.(5 pts.) Se repartirán 60 paquetes de vacunas en 3 ciudades distintas llamadas Ambar, Esmeralda y Rubi. En Ambar existen tres hospitales y todos recibirán la misma cantidad de paquetes. En Esmeralda también hay tres hospitales y entre ellos se repartirán equitativamente los paquetes. En Rubí existen 2 hospitales, pero el mayor de ellos recibirá el doble de paquetes que el otro. ¿De cuántas maneras podemos repartir los 60 paquetes entre las 3 ciudades de manera que todos los hospitales reciban al menos un paquete?

60 paquetes de vacunas
- → Ambar : 3 hospitales y todos reciben la misma cantidad
- → Esmeralda : 3 hospitales y todos reciben la misma cantidad
- → Rubi : 2 hospitales y el mayor recibe el doble

x_1 = cantidad que recibe un hospital de Ambar

$\Rightarrow$ cantidad de paquetes que van a Ambar: $3x_1$ con $\underline{x_1 \geq 1}$

x_2 = cantidad de paquetes que recibe un hospital de Esmeralda

$\Rightarrow$ cantidad de paquetes que van a Esmeralda: $3x_2$ con $x_2 \geq 1$

x_3 = cantidad de paquetes que recibe el hospital más chico de Rubi

$\Rightarrow$ cantidad de paquetes que van a Rubi:

$$\underbrace{x_3}_{\text{hospital chico}} + \underbrace{2x_3}_{\text{hospital grande}} = 3x_3 \quad \text{con } x_3 \geq 1$$

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 60 \quad \text{con } x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1,\ x_3 \geq 1$$

PIE

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20 \quad \text{con } x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 1,\ x_3 \geq 1 \qquad 1 \leq x_3 \leq 4$$

esta ecuación tiene la misma cantidad de soluciones que

$$x_1 + x_2 + x_3 = 17 \quad \text{con } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

la cantidad de soluciones es $CR^3_{17} = C^{19}_{17} = C^{19}_{2}$

Múltiple Opción 1

Si x_i denota la cantidad de bolitas dentro de la caja i, debemos contar soluciones naturales de la ecuación $x_1+\ldots+x_6 = 10$ sujeto a que $1 \leq x_i \leq 3$ para cada $i \in \{1,\ldots,6\}$. Tomando un cambio de variables $y_i = x_i - 1$, podemos contar equivalentemente la cantidad de soluciones naturales de $y_1 + \ldots + y_6 = 4$ sujeto a que se deben cumplir las desigualdades $y_i \leq 2$ para cada $i \in \{1,\ldots,6\}$. Para efectuar tal conteo podemos utilizar el Principio de Inclusión y Exclusión considerando el universo cuyos elementos son todas las soluciones naturales de $y_1 + \ldots + y_6 = 4$ y las condiciones $c_i : y_i \geq 3$ para cada $i \in \{1,\ldots,6\}$. Notando que se pueden cumplir 0 o bien 1 de las condiciones, tenemos que:

$$n(\overline{c_1},\ldots,\overline{c_6}) = \underbrace{CR^4_6}_{CR^6_4} - \binom{6}{1}CR^6_1 = \underbrace{\binom{9}{4}}_{C^9_4 = CR^6_4} - 6\binom{6}{1}\binom{6}{1} = 90,$$

Ejercicio MO5:

Sea b_n la sucesión generada por la función

$$b(x) = \frac{x+1}{1-3x+2x^2}.$$

Hallar b_6 el coeficiente de x^6:

A) 190
B) 191
C) 192
D) 193

Resolución:

$$\frac{x+1}{1-3x+2x^2} = \frac{x+1}{(1-2x)(1-x)} = (x+1)\left(\frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-x}\right) = (x+1)\left(\frac{2}{1-2x} + \frac{-1}{1-x}\right)$$

$$= (x+1)\left(2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n - \sum_{n=0}^{\infty}x^n\right) = (x+1)\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)$$

De donde el coeficiente en x^6 es $2^6 + 2^7 - 1 - 1 = 64 + 128 - 2 = 190$

Ejercicios de Desarrollo

$$f(x,y) = \sum_{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=5} \frac{5!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!} x^{n_1}(-2x^2)^{n_2} y^{n_3}(2y^3)^{n_4}(1)^{n_5}$$

MO2

Hallar el coeficiente en x^2y^3 de $f(x,y) = (x - 2x^2 + y + 2y^3 + 1)^5$.
A) -20; B) -30; C) -40; D) -50.

$$f(x,y) = (x \underbrace{-2x^2} + y + 2y^3 + 1)(x - 2x^2 + y + \underbrace{2y^3} + 1) \cdots (x - 2x^2 + y + 2y^3 + \underline{1})$$

* elijo x 2 veces, y 3 veces : $\dfrac{5!}{2!\,3!} x^2(-2x^2)^0 y^3 (2y^3)^0 1^0$

$x\,x\,y\,y\,y$ $\quad (x - 2x^2 + y + 2y^3 + 1)(\cdots)(\cdots)(\cdots)(\cdots)$
$y\,y\,y\,x\,x$ $\quad x \quad x \quad y \quad y \quad y \rightsquigarrow x^2y^3$
$y\,x\,x\,y\,y$ $\quad y \quad y \quad x \quad y \quad x \rightsquigarrow x^2y^3$

la cantidad de veces que podemos constrir x^2y^3 de esta forma es la cantidad de palabras con 2 x's y 3 y's

$$\frac{5!}{2!\,3!}$$

* elijo $-2x^2$ una vez, $2y^3$ una vez, 1 tres veces

$$(x - 2x^2 + y + 2y^3 + 1)(\ldots)(\ldots)(\ldots)(\ldots)$$

$$\begin{array}{ccccccc} -2x^2 & 2y^3 & 1 & 1 & 1 & \rightsquigarrow & -4\underbrace{x^2y^3}\,1^3 \\ 1 & 1 & 2y^3 & -2x^2 & 1 & \rightsquigarrow & -4x^2y^3\,1^3 \end{array}$$

la cantidad de formas de construir x^2y^3 de este forma la cantidad de formas de construir, un $-2x^2$, un $2y^3$ y tres 1's es la cantidad de palabras con un $-2x^2$, un $2y^3$ y tres 1's

$$\frac{5!}{1!\,1!\,3!} = \frac{5!}{3!}$$

si elijo $-2x^2$ una vez, $2y^3$ una vez y 1 tres veces:

$$\frac{5!}{3!}\left(x^0(-2x^2)^1\, y^0\,(2y^3)^1\, 1^3\right) = \frac{5!}{3!}(-2x^2)(2y^3)$$

$$= -4\,\frac{5!}{3!}\,x^2y^3$$

* elijo x dos veces, $2y^3$ una vez, 1 dos veces

$$(x - 2x^2 + y + 2y^3 + 1)(\ldots)(\ldots)(\ldots)(\ldots)$$

$$\begin{array}{ccccc} x & x & 2y^3 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\frac{5!}{2!\,1!\,2!}\,x^2(-2x^2)^0\,y^0\,(2y^3)^1\,1^2 = \frac{5!}{2!\,2!}\,x^2\,(2y^3)$$

$$= \underbrace{2\,\frac{5!}{2!\,2!}}\,x^2y^3$$

$*$ elijo y tres veces, $-2x^2$ una vez, 1 una vez

$$(x-2x^2+y+2y^3+1)(--)(\cdots)(\cdots)(\cdots)$$
$$y \quad y \quad y \quad -2x^2 \quad 1$$

$$\frac{5!}{3!1!1!} x^0 (-2x^2)^1 y^3 (2y^3)^0 1^1 = \frac{5!}{3!} (-2x^2) y^3$$
$$= \underbrace{-2 \frac{5!}{3!}} x^2 y^3$$

Entonces el coeficient de x^2y^3 es:

$$\frac{5!}{3!2!} - 4 \frac{5!}{3!} + 2 \frac{5!}{2!2!} - 2 \frac{5!}{3!}$$

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_i^n x^i$$

$$\frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n} = \sum_{i=0}^{n} C_i^{-n} x^i$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i CR_i^n x^i$$

Ejercicio Múltiple Opción 3: ¿Cuántas permutaciones de la palabra "PAPELES" no dejan dos letras juntas?

PP AELES

A) 540 **B)** 600 **C)** 660.

$\mathcal{U} = \{$ permutaciones de PAPELES $\}$

$$|\mathcal{U}| = \frac{7!}{2!\,2!}$$

PAPELES

c_1 = permutación de PAPELES donde las dos P quedan juntas

c_2 = permutación de PAPELES donde las dos E quedan juntas

$$N(c_1) = \frac{6!}{2!}$$

$\underbrace{(PP)}_{\text{un solo caracter}}$ A ELES

$$N(c_2) = \frac{6!}{2!}$$

$\underbrace{EE}_{\text{un solo caracter}}$ PAPLS

$$N(c_1 c_2) = 5!$$

$\underbrace{PP}_{\text{un solo caracter}}\ \underbrace{EE}_{\text{un solo caracter}}$ ALS

$$N(\bar{c}_1 \bar{c}_2) = |\mathcal{U}| - N(c_1) - N(c_2) + N(c_1 c_2)$$

$$= \frac{7!}{2!\,2!} - \frac{6!}{2!} - \frac{6!}{2!} + 5!$$

$$= \frac{7!}{2!\,2!} - \cancel{2}\ \frac{6!}{\cancel{2!}} + 5!$$

$= 2^n + 1$ $\qquad r^n \cdot g(n)$

$\ldots = 6n + 5 = 1^n \underbrace{(6n+5)}_{\text{polinomio de grado 1}}$

$= 2^n$

$= 1$

$a_n^{(p)} = \_\_ \, 1^n (an + b)$

$r^n g(n) \rightsquigarrow 2^n = 2^n \cdot \underbrace{1}_{\text{polinomio de grado cero}}$

$a_n^{(p)} = \_\_ \, 2^n \cdot c$