

# Curso: HORMIGÓN ESTRUCTURAL 1

## MÓDULO 9: INESTABILIDAD EN SOPORTES (PANDEO)

Agustin Spalvier (aspalvier@fing.edu.uy)

1<sup>er</sup> Semestre - 2023

Universidad de la República - Uruguay



- **Repaso: Pandeo**
- **Repaso: Longitud de pandeo**
- **Método aproximado**
- **Definiciones**
- **Rango de aplicación EHE-08**
- **Método aproximado EHE**
- **Ejemplo**

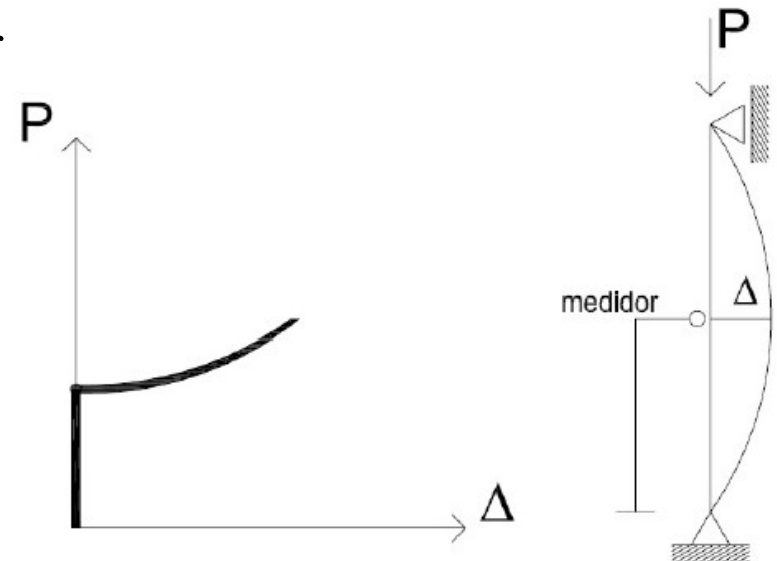
**ACLARACIÓN:** Estas transparencias se preparan únicamente como una guía para las clases, las cuales cumplen la función de ser una presentación de los temas que el estudiante debe aprender para aprobar el curso, indicados en la bibliografía.

**Bibliografía:** Jiménez Montoya – 15<sup>a</sup> Ed. – Cap. 20.1; 20.2.1; 20.3; 20.6.2; 20.6.4; 20.6.5  
EHE-08 – 43.1.1 a 43.3, 43.5, 43.5.1

# Repaso (R2): Pandeo

- **Pandeo en elementos de materiales elástico-lineales.**

- Se vio que **no hay una relación lineal** entre las **cargas** y los **efectos** que éstas producen.
- Si sometemos una columna a una **carga de compresión P** y medimos el **desplazamiento** horizontal del punto medio de la columna, se puede ver que:
  - El punto medio de la columna no se desplaza horizontalmente cuando la carga P comienza a crecer. Sin embargo, **a partir de un cierto valor** de ésta, comienza a tener un **desplazamiento significativo** que aumenta en mayor medida que la carga.
  - Si se continua aumentando la carga, la columna termina rompiéndose. Pero **si se retira la carga**, la **columna vuelve a su posición inicial** (comportamiento elástico). Sin embargo la relación carga-desplazamiento no es lineal.
- El pandeo es entonces un **fenómeno no lineal que se desata bruscamente**. La columna pasa de no tener desplazamiento lateral (estabilidad) a, con un incremento relativamente pequeño de la fuerza, tener un desplazamiento importante (que puede alcanzar el colapso). Situación no deseable en nuestras estructuras.

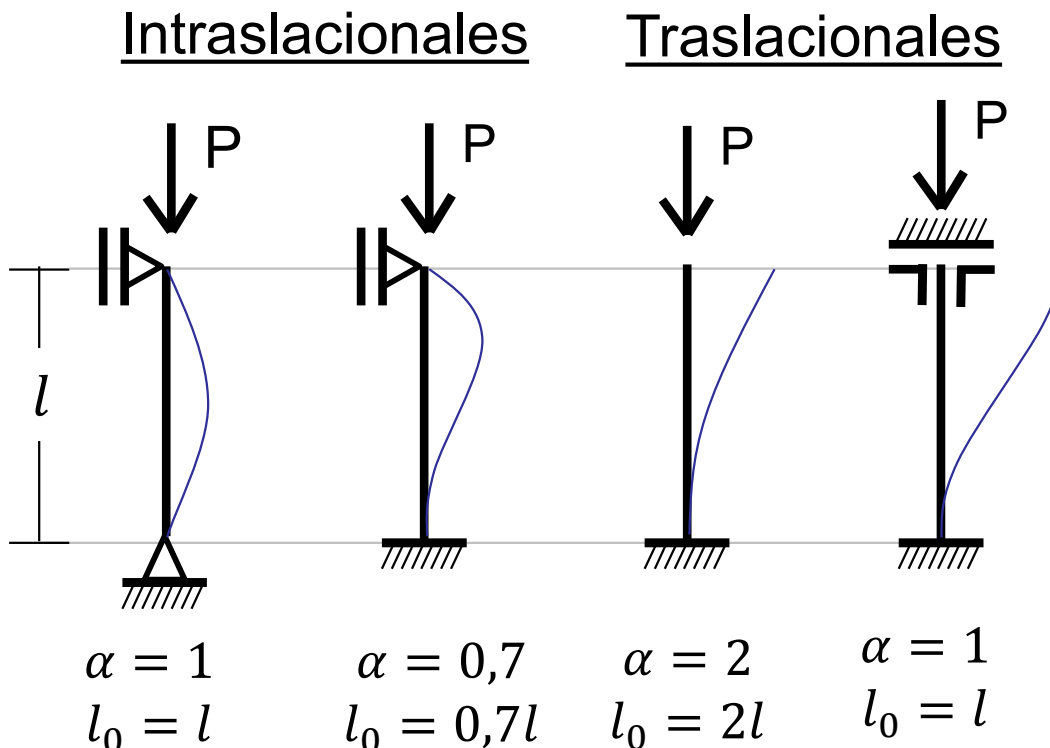


# Repaso: Longitud de pandeo

## • Definición:

- La **longitud de pandeo** ( $l_0$ ) de un soporte se define como la longitud del soporte biarticulado equivalente al mismo a efectos de pandeo, y es igual a la distancia entre los puntos de momento nulo del mismo.
- Se suele indicar la luz de pandeo ( $l_0$ ) como la luz real ( $l$ ) multiplicada por un factor ( $\alpha$ ) dependiente de los vínculos y condiciones de los apoyos. ( $l_0 = \alpha l$ )

## • Ejemplos



Sustentación de la pieza de longitud $l$	Valor del coeficiente $\alpha$
– Un extremo libre y otro empotrado	2
– Ambos extremos articulados	1
– Ambos extremos empotrados, pero con libre desplazamiento normal a la directriz	0,7
– Un extremo con articulación fija y el otro empotrado	0,7
– Ambos extremos empotrados	0,5

Se pueden usar nomogramas para pilares de pórticos con vigas y pilares de rigideces similares, lo que da diferentes valores de  $\alpha$

# Introducción (Calavera Cap. 45)

Si un pilar es muy esbelto, puede ocurrir que su capacidad resistente se vea disminuida por las deformaciones transversales debidas a las sollicitaciones actuantes, o a las excentricidades o faltas de verticalidad accidentales. En pilares poco esbeltos, tales como el a) de la figura 45-1, la flecha  $\Delta$  debida a la acción  $N$  conduce a una sollicitación de agotamiento del pilar  $N'_u$ , bajo un momento flector  $M'_u = N'_u (e + D)$  sensiblemente

igual al valor  $M_u = N_u \cdot e$  y, en definitiva, puede aceptarse que  $N_u = N'_u$  y que el momento de segundo orden es despreciable. En el primer caso (fig. 45-2), el punto representativo de la situación de servicio de la sección del pilar es el A, y el esfuerzo axial y el momento flector crecen proporcionalmente hasta alcanzar el punto B de agotamiento correspondiente a la sollicitación  $(N_u, N_u \cdot e)$ . En el segundo caso, el recorrido de A hasta el agotamiento es la curva AC, donde a C le corresponde la sollicitación de agotamiento  $N'_u, N'_u (e + \Delta)$ . Como decimos, si el pilar no es esbelto, la diferencia puede despreciarse.

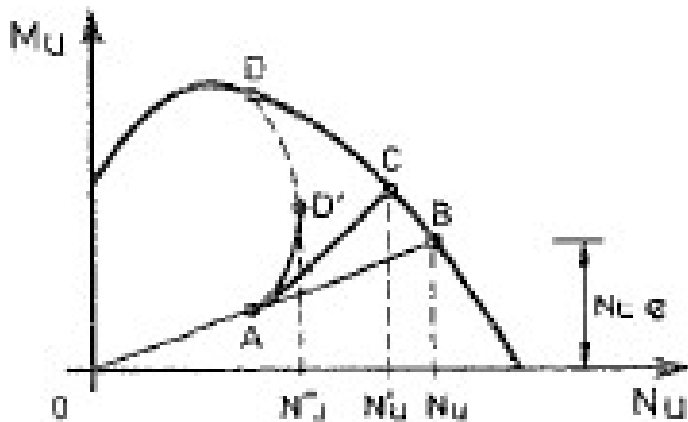


Figura 45.2

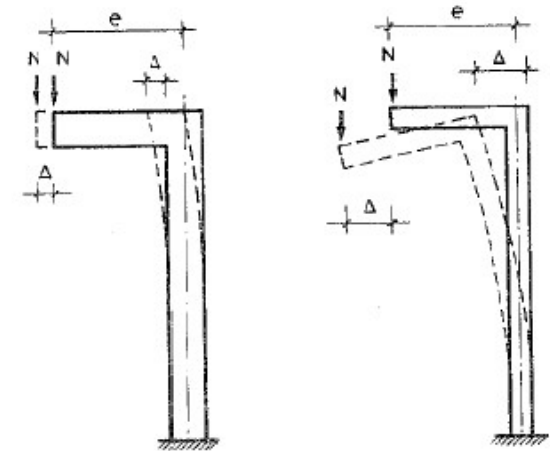


Figura 45-1

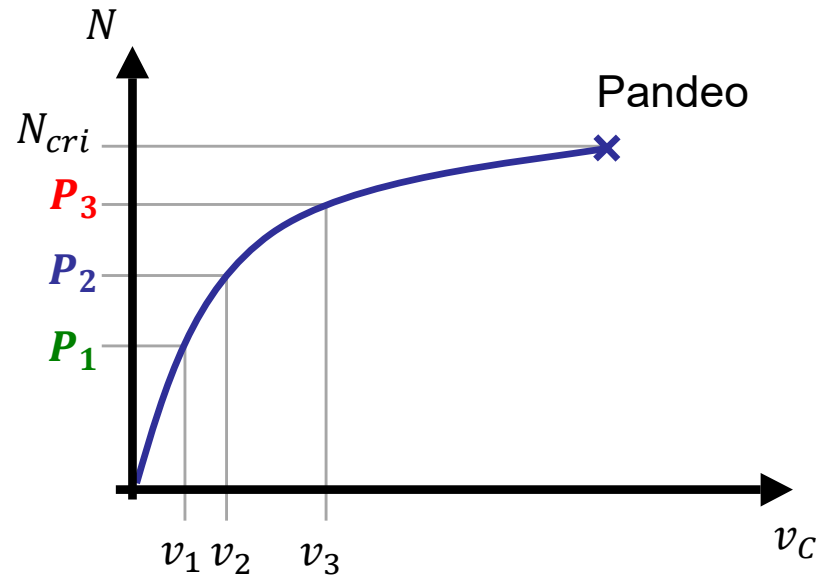
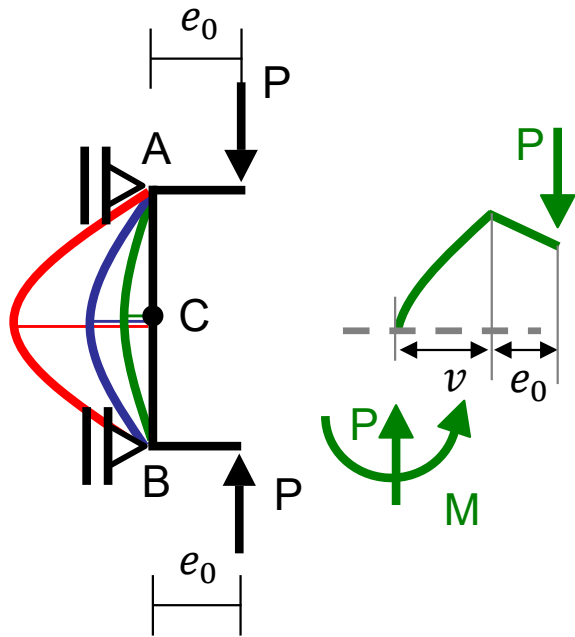
Si el pilar tiene, en cambio, una esbeltez importante (fig. 45-1 b)) la flecha  $\Delta$  lo será también y el comportamiento de la pieza, debido a que el momento adicional  $N \cdot \Delta$  ya no es despreciable, puede ser muy diferente. Las deformaciones  $\Delta$  pueden crecer muy rápidamente y el agotamiento ocurrir en un punto teórico  $D'$  (fig. 45-2), bajo un axil  $N''_u$  muy reducido respecto a los valores  $N_u$  o  $N'_u$ . Mientras que el agotamiento en los puntos B y C corresponde al estado límite último de flexión compuesta, con agotamiento del hormigón y/o del acero, es decir, con fallo de la pieza por agotamiento de los materiales, el caso D corresponde a un fallo por pandeo, debido a la inestabilidad de forma de la pieza.

En el caso que nos ocupa, referente a pilares de hormigón, el problema se agrava por el crecimiento adicional de  $\Delta$  debido a las dos causas siguientes:

- El incremento  $N \cdot \Delta$  del momento flector, al fisurarse la pieza reduce el valor  $I$  del momento de inercia de la sección.
- El proceso de fluencia del hormigón, si la carga es duradera, produce un incremento de deformación análogo al que produciría una reducción del módulo de deformación  $E_c$  del hormigón.

En definitiva, la flecha adicional  $\Delta$  al reducir la rigidez  $(EI)$  de la pieza, reaccúa sobre el problema, incrementando  $\Delta$ .

# Relación no lineal entre cargas y desplazamientos



Relación carga-desplazamiento de un pilar real (imperfecto)

Relación no-lineal entre  $M$  y  $v$  (y entre  $M$  y  $P$ ),  $M$  y  $v$  toman valores cada vez más altos para pequeños incrementos de  $N$

Centro (punto C)

$N$	$M_{prim}$	$M_{sec}$
$P_1$	$P_1 e_0$	$P_1 (e_0 + v_1)$
$P_2$	$P_2 e_0$	$P_2 (e_0 + v_2)$
$P_3$	$P_3 e_0$	$P_3 (e_0 + v_3)$

Extremo (puntos A y B)

$N$	$M_{prim}$	$M_{sec}$
$P_1$	$P_1 e_0$	$P_1 e_0$
$P_2$	$P_2 e_0$	$P_2 e_0$
$P_3$	$P_3 e_0$	$P_3 e_0$

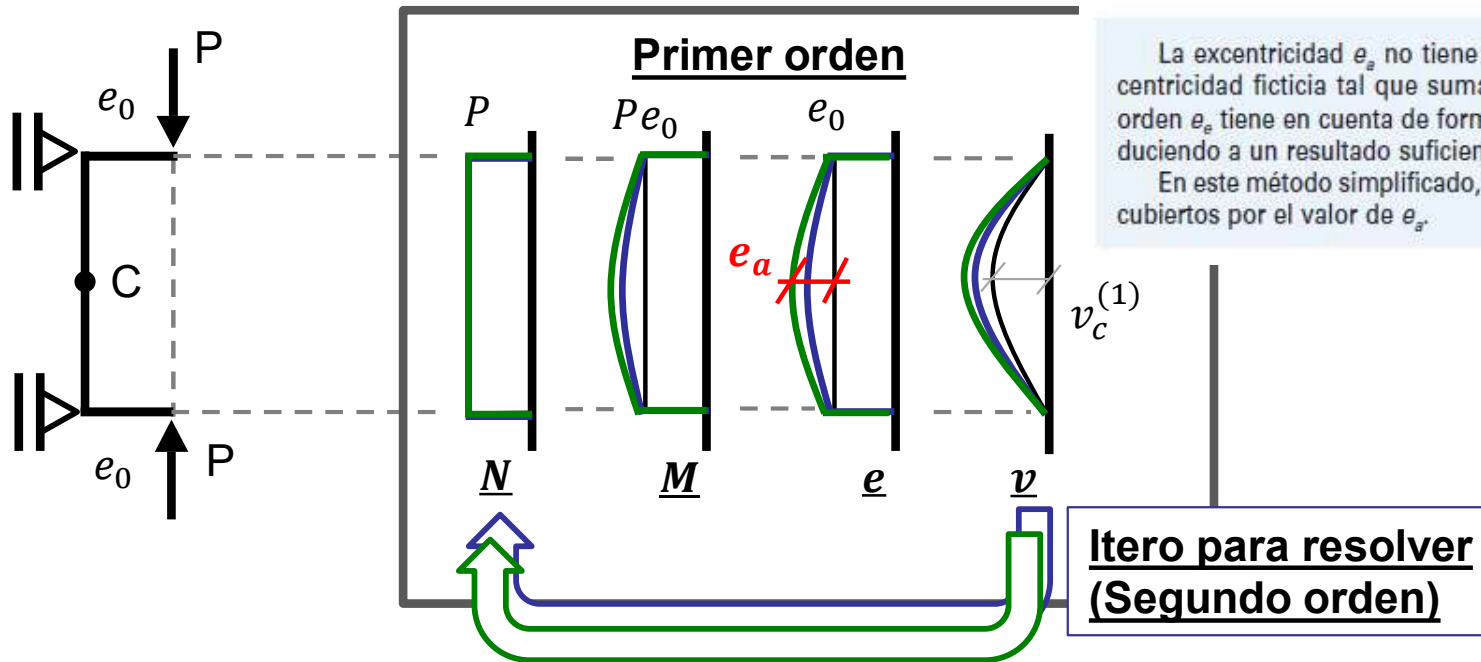
Efectos del pandeo son de mayor importancia en el tercio central del pilar.

# Método aproximado

– En forma práctica (método aproximado), el problema del pandeo se trata considerando una excentricidad complementaria ( $e_a$ : *excentricidad ficticia*). Esta depende de:

- la excentricidad inicial  $e_0$ ,
- la rigidez  $EI$  en la dirección analizada
- la longitud de pandeo.

– (en las fórmulas están internamente considerados también los efectos de retracción y fluencia)



**Es decir:** dado  $P$  encuentro  $v(x)$  considerando los efectos de segundo orden (esto se llama análisis  $P - \Delta$ ) que es implica plantear las ecuaciones de equilibrio en la configuración deformada (elasticidad finita)  $\Rightarrow$  **El Método aproximado estima la excentricidad de segundo orden y le llama “excentricidad adicional” o “excentricidad ficticia”**  $\Rightarrow$  Luego se dimensiona la flexocompresión con un nuevo par de solicitaciones:  $N_d$  y  $N_d(e_0 + e_a)$

- **Estructuras intraslacionales y traslacionales (Art. 43.1.1)**

- *Intraslacionales*: los desplazamientos transversales de sus nudos tienen efectos despreciables desde el punto de vista del cálculo.
- *Traslacionales*: En caso contrario

- **Soportes aislados:**

- Soportes en los que puede suponerse que la posición de los puntos donde se anula el momento de segundo orden no varía con la carga.
- (nos centraremos en estos casos en H1. En H2 analizaremos estructuras aporticadas)

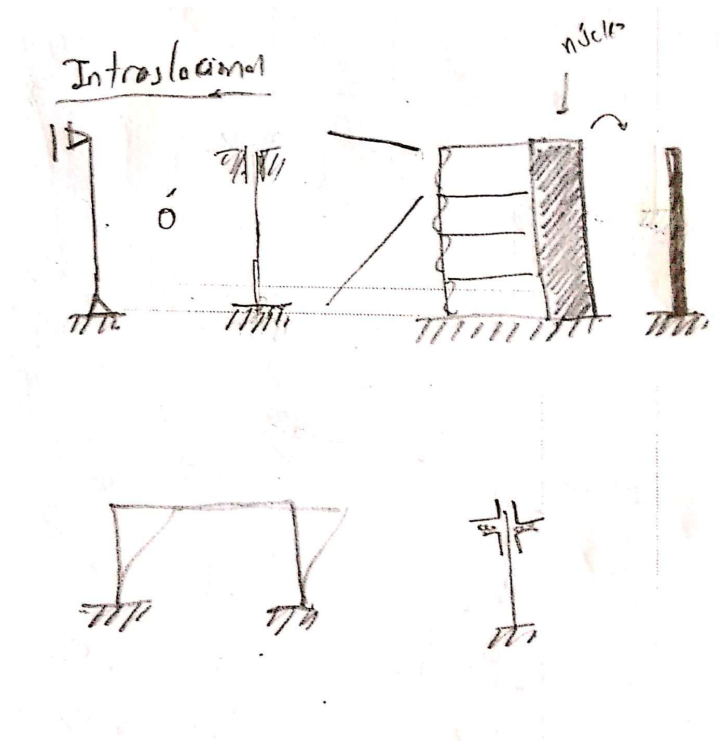
- **Esbeltez mecánica:**  $\lambda = l_0 / i_c$

- con  $l_0$ : longitud de pandeo y  $i_c$ : radio de giro (en la dirección considerada)

$$i_c = \sqrt{I / A}$$

- **Esbeltez geométrica:**  $\lambda_g = l_0 / h$

- con  $h$ , altura de la sección en la dirección considerada



Otros criterios de inestabilidad en Art. 43.1



# Rango de aplicación EHE-08 (Art.: 43.1.2)

- La norma cubre soportes con esbeltez mecánica menor a 200 ( $\lambda < 200$ ).
- Para soportes de poca esbeltez, los efectos de segundo orden pueden despreciarse.
- La norma da una fórmula para determinar la esbeltez mínima ( $\lambda_{inf}$ ) a partir de la cual se deben considerar los efectos de segundo orden.

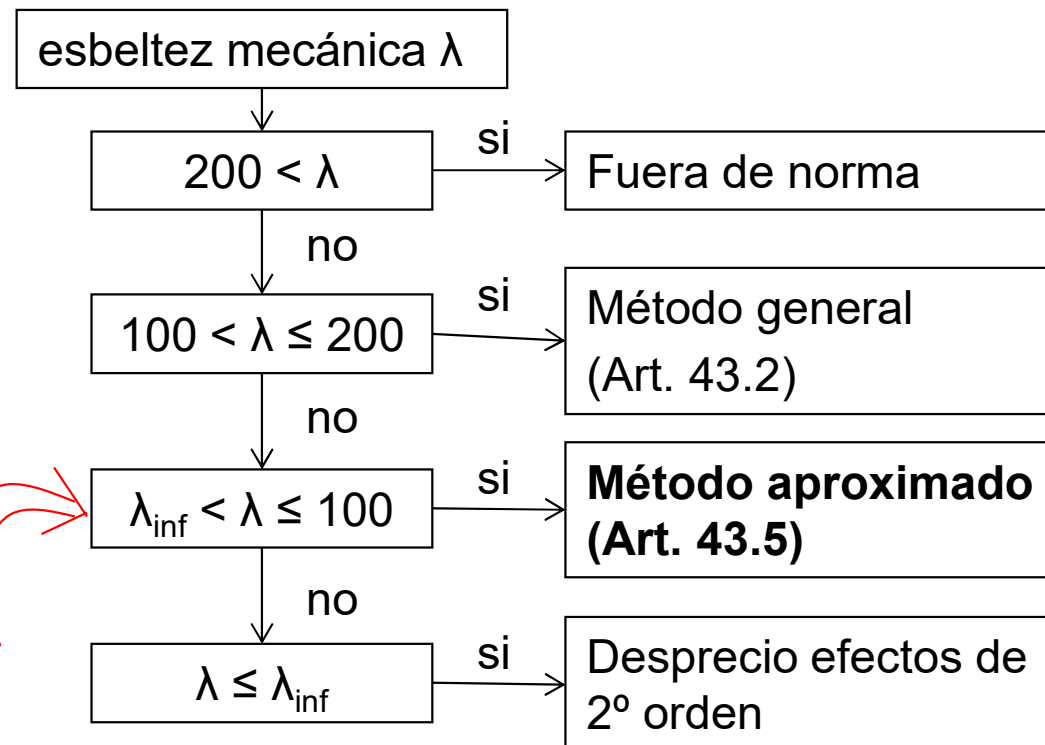
$$\lambda_{inf} = 35 \sqrt{\frac{C}{v} \left[ 1 + \frac{0,24}{e_2/h} + 3,4 \left( \frac{e_1}{e_2} - 1 \right)^2 \right]} \geq 100$$

- En el curso, en forma simplificada, consideraremos los efectos de segundo orden para esbelteces mayores a 35 ( $35 < \lambda$ ). (El mismo criterio que utiliza la UNIT).

## • Comprobación

- La norma indica un método general, a utilizar para pilares muy esbeltos ( $100 < \lambda$ ).
- En casos de esbeltez moderada ( $\lambda \leq 100$ ), se utilizará el “método aproximado”, que veremos en H1.

Recordar introducción de Calavera



# Método aproximado EHE

Para soportes de sección y armadura constante deberá dimensionarse la sección para una excentricidad total igual a la que se indica:

**43.5.1**  
Método aproximado.  
Flexión compuesta recta

$$e_{tot} = e_e + e_a \geq e_2$$

$$e_{tot} = \max(e_e + e_a, e_2)$$

$$e_a = (1 + 0,12\beta)(\varepsilon_y + 0,0035) \frac{h + 20e_e}{h + 10e_e} \cdot \frac{l_0^2}{50i_c}$$

Mayor excentricidad de 1er orden.

Se puede generalizar a "mayor excentricidad en el tercio central"

donde:

$e_a$  Excentricidad ficticia utilizada para representar los efectos de segundo orden.

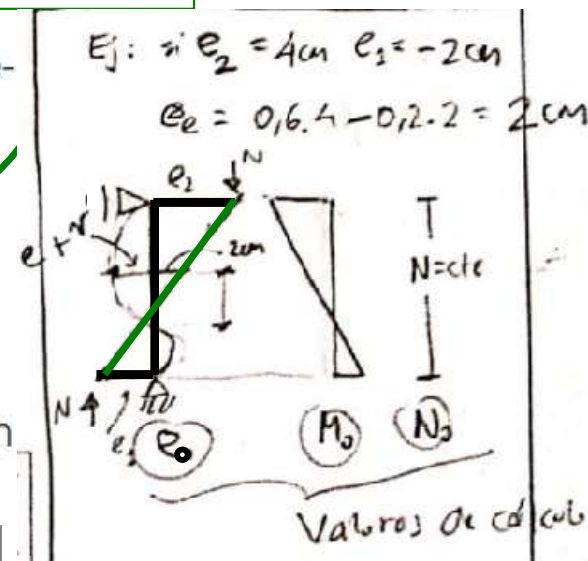
$e_e$  Excentricidad de cálculo de primer orden equivalente.

$$e_e = 0,6e_2 + 0,4e_1 \geq 0,4e_2 \quad \text{para soportes intraslacionales;}$$

$$e_e = e_2 \quad \text{para soportes traslacionales.}$$

$e_1, e_2$  Excentricidades del axil en los extremos de la pieza definidas en 43.1.2.

- 43.1.2:
- $e_2$  Excentricidad de primer orden en el extremo del soporte con mayor momento, considerada positiva.
  - $e_1$  Excentricidad de primer orden en el extremo del soporte con menor momento, positiva si tiene el mismo signo que  $e_2$ .  
En estructuras traslacionales se tomará  $e_1/e_2$  igual a 1,0.



Peor punto no es en el centro de la luz sino hacia un apoyo  $\Rightarrow$  tercio central.

- $e_e$  no menor que la *excentricidad mínima* ( $e_{min}$ ) (Art. 42.2.1)!

– Términos de la excentricidad ficticia:

- $l_0$  Longitud de pandeo.
- $i_c$  Radio de giro de la sección de hormigón en la dirección considerada.
- $h$  Canto total de la sección de hormigón.
- $\varepsilon_y$  Deformación del acero para la tensión de cálculo  $f_{yd}$ , es decir,

$$\varepsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s}$$

$\beta$  Factor de armado, dado por

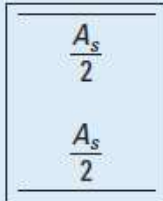
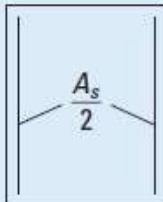
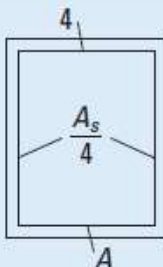
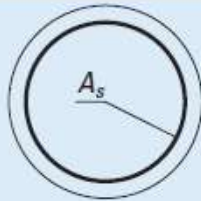
$$\beta = \frac{(d - d')^2}{4i_s^2}$$

siendo  $i_s$  el radio de giro de las armaduras. Los valores de  $\beta$  y de  $i_s$  se recogen en la tabla 43.5.1 para las disposiciones de armaduras más frecuentes.

Pensar:  
¿Cómo actúa el momento?

$$e_a = (1 + 0,12\beta)(\varepsilon_y + 0,0035) \frac{h + 20e_e}{h + 10e_e} \cdot \frac{l_0^2}{50i_c}$$

Tabla 43.5.1

Disposición de armadura	$i_s^2$	$\beta$
	$\frac{1}{4}(d - d')^2$	1,0
	$\frac{1}{12}(d - d')^2$	3,0
	$\frac{1}{6}(d - d')^2$	1,5
	$\frac{1}{8}(d - d')^2$	2,0

## 42.2.1

### Excentricidad mínima

En soportes y elementos de función análoga, toda sección sometida a una sollicitación normal exterior de compresión  $N_d$  debe ser capaz de resistir dicha compresión con una excentricidad mínima, debida a la incertidumbre en la posición del punto de aplicación del esfuerzo normal, igual al mayor de los valores:

$$h/20 \text{ y } 2 \text{ cm}$$

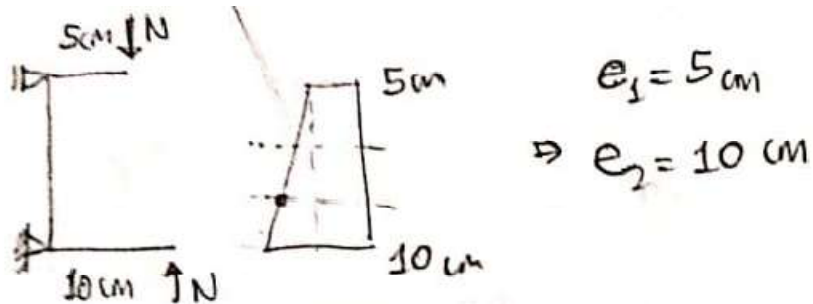
Dicha excentricidad debe ser contada a partir del centro de gravedad de la sección bruta y en la dirección más desfavorable de las direcciones principales y sólo en una de ellas.

# Excentricidad de cálculo en “tercio central”

- La excentricidad de cálculo dada en la norma se aplica para los casos más habituales.
- Cuando se tienen cargas transversal en el tramo, o combinaciones no usuales, el procedimiento se puede extender utilizando el concepto de carga en el “**tercio central**”.
- En vez de la **excentricidad de cálculo** ( $e_e$ ) dada por la fórmula de la norma, se utiliza la  **$e_e =$  máxima excentricidad de primer orden existente en el tercio central de la “columna equivalente”** a los efectos de pandeo (para pilares/pórticos traslacionlaes, en general, coincide con la excentricidad en el extremo desplazable).
- Esta excentricidad de cálculo no debe ser menor a la excentricidad mínima ( $e_{min}$ )
- Los casos de flexión esviada se tienen en cuenta en Art. 43.5.2 (se ve en Hormigón 2).

# Ejemplos de cálculo de excentricidad total

## Ejemplo 1: intraslacional



Excentricidad equivalente:

$$e_e = 0,6 \times 10 + 0,4 \times 5 = 8 \text{ cm} > 0,4e_2 > e_{min}$$

si hubiésemos optado por el criterio del tercio central hubiera dado parecido pero no igual:

$$\frac{10-5}{L} \times \frac{2}{3}L + 5 = 8,3 \text{ cm}$$

Caso 1 (pilar "rígido"):  $e_a(8 \text{ cm}) = 1 \text{ cm} \Rightarrow$

$$e_{tot} = \max \left( \underbrace{e_e + e_a}_{9 \text{ cm}}, \underbrace{e_2}_{10 \text{ cm}} \right) = 10 \text{ cm} \rightarrow \text{dimensionar 1er orden}$$

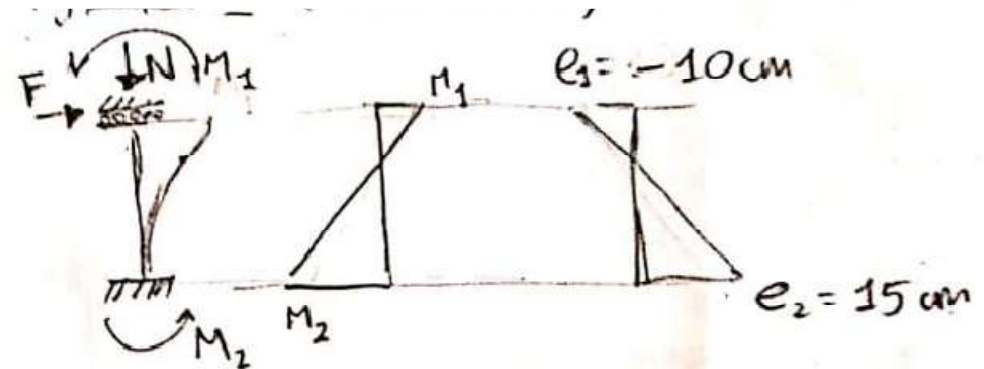
Caso 2 (pilar "flexible"):  $e_a(8 \text{ cm}) = 3 \text{ cm} \Rightarrow$

$$e_{tot} = \max \left( \underbrace{e_e + e_a}_{11 \text{ cm}}, \underbrace{e_2}_{10 \text{ cm}} \right) = 11 \text{ cm} \rightarrow \text{dimensionar 2do orden}$$

En ambos casos se dimensiona sección con:

$$(N_d, M_d) = (N_d, e_{tot} \cdot N_d)$$

## Ejemplo 2: traslacional



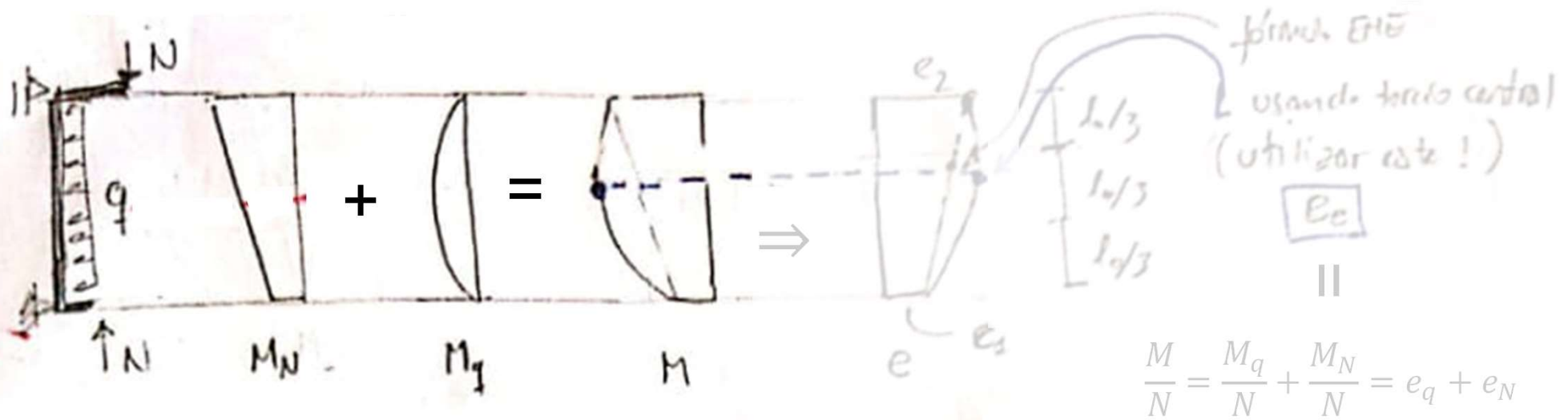
Excentricidad equivalente

$$e_e = e_2 = 15 \text{ cm} > e_{min} \checkmark$$

$$e_a(e_e) = \dots$$

$$e_{tot} = e_e + e_a = \dots$$

$$(N_d, M_d) = (N_d, e_{tot} \cdot M_d)$$



$e_e \neq 0,4e_2 \neq e_{min} \rightarrow$  calculo  $e_a$

$e_{tot} = e_e + e_a \neq e_2$

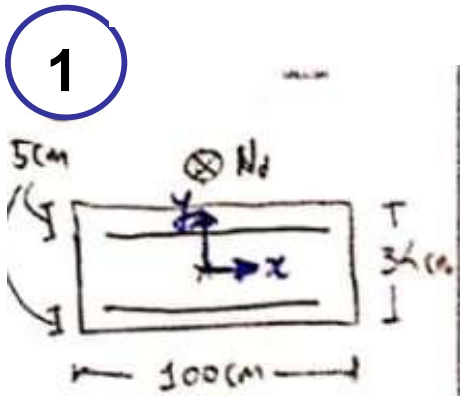
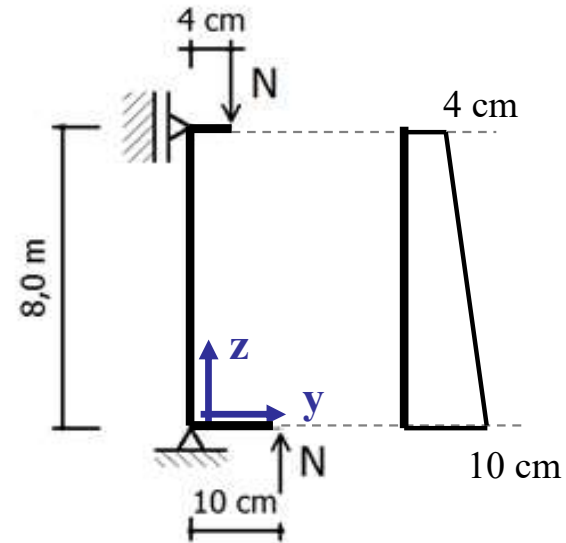
diseño sección (comprimida) para  $(M_d, N_d) = (N_d \cdot e_{tot}, N_d)$

## Ejercicio 3

El pilar de la figura tiene sección rectangular de  $0,34 \text{ m} \times 1,00 \text{ m}$ . La carga de diseño  $N$  es de  $3200 \text{ kN}$ , aplicada con las excentricidades indicadas en la dirección de **menor** inercia de la sección.

Determinar las armaduras necesarias, tanto longitudinales como transversales, indicando esquemáticamente su disposición en la sección.

Materiales:  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ ;  $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ . Rec. mecánico:  $5,0 \text{ cm}$



$$A_c = 1 \times 0,34 \text{ m}^2 = 0,34 \text{ m}^2$$

$$I_c = \frac{1 \times 0,34^3}{12}$$

$$= 3,276 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

$$i_c = \sqrt{I_c/A_c} = 0,098 \text{ m}$$

$$l_0 = l = 8 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{l}{i_c} = 81,5$$

$\Rightarrow \lambda > 35 \Rightarrow$  debo considerar segundo orden

$\Rightarrow \lambda < 100 \Rightarrow$  uso método aproximado

2 Solo hace falta analizar el pandeo en el plano yz

Calculo  $e_e$  del diagrama de excentricidad (M/N) que es lineal  $\Rightarrow$  uso fórmula EHE  $\Rightarrow$

$$e_e = 0,4e_1 + 0,6e_2 = 7,6 \text{ cm}$$

$$0,4e_2 = 4 \text{ cm} < 7,6 \text{ cm} \Rightarrow \text{ok}$$

$$e_{min} = \max\left(\frac{h}{20} = 1,7 \text{ cm}, 2 \text{ cm}\right)$$

$$< 7,6 \Rightarrow \text{ok}$$

# Continúa ejemplo

Calculo  $e_a$  usando la ecuación del método aproximado.

$$e_a = (1 + 0,12\beta)(\varepsilon_y + 0,0035) \frac{h + 20e_e}{h + 10e_e} \frac{l_0^2}{50i_c} \Rightarrow$$

Sabiendo que

$$\beta = 1 \quad \boxed{\quad \quad \quad}$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_{yd}}{E_s} = 2,17 \times 10^{-3} \Rightarrow$$

$$e_a = 14 \text{ cm} \Rightarrow$$

$e_{tot} = \max$

$$\begin{cases} e_a + e_e = 21,6 \text{ cm} \\ e_2 = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_{tot} = 21,6 \text{ cm}$$

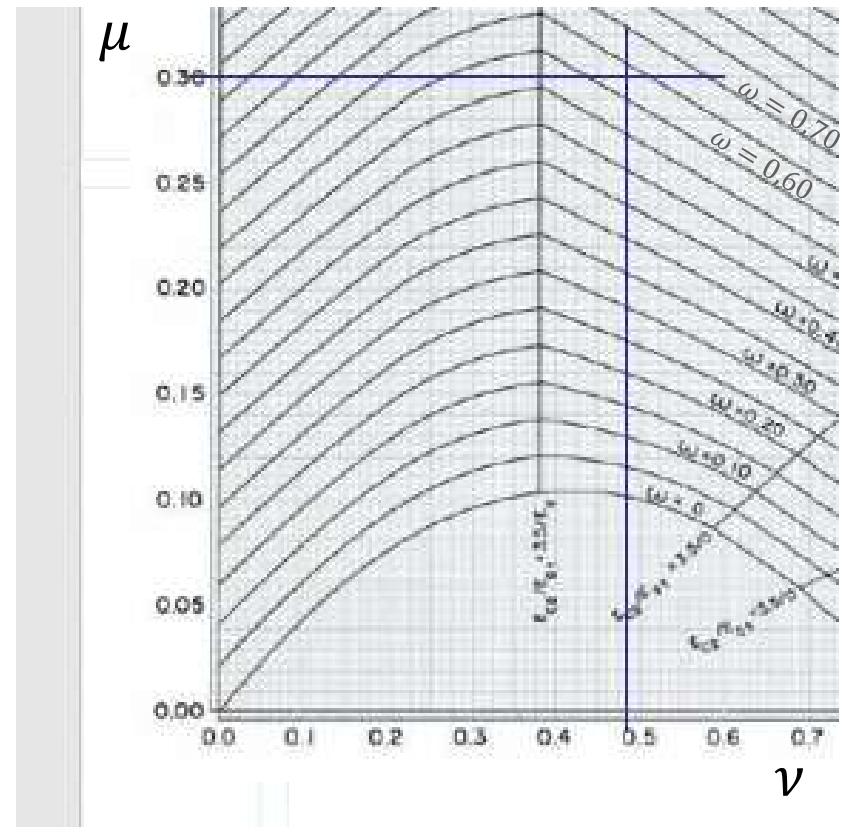
$$\textcircled{3} (N_d, M_d) = (3700 \text{ kN}, 3700 \text{ kN} \times 0,216 \text{ m}) = (3,2 \text{ MN}; 0,6912 \text{ MNm}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  con  $(N_d, M_d)$  calculo  $(\nu, \mu)$

$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \rightarrow A_c = 0,34 \text{ m} \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow f_{cd} = \frac{f_{ck}}{1,5} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\nu = 0,47}$$

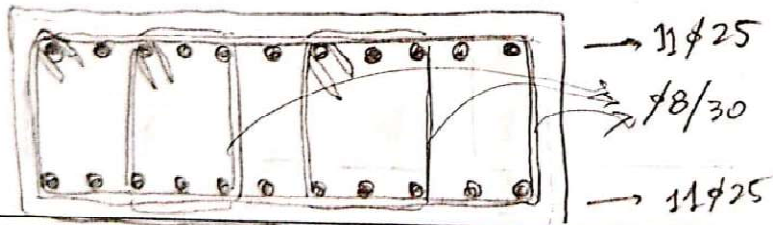
$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}} = 0,30 \Rightarrow \text{entro al óvalo } \boxed{\nu} \text{ con } d' = 0,15 h$$

$$\frac{d'}{h} = \frac{0,05}{0,34} = 0,147 \approx 0,15$$





$$\Rightarrow \omega = 0,65 \Rightarrow A_{tot} = \frac{\omega A_c f_{cd}}{f_{yd}} = 101,7 \text{ cm}^2 \Rightarrow 22 \phi 25 (108 \text{ cm}^2)$$



$$S_t = \min(15 \times 2,5; 3A; 30) = 30 \text{ cm}$$

$$\phi_t \geq \frac{2,5}{A} = 0,62 \Rightarrow \phi 8$$

### DIAGRAMAS DE INTERACCION ADIMENSIONALES

