TRANSFORMACIONES LINEALES

MARCO A. PÉREZ

ABSTRACT. El objetivo de estas notas es simplemente hacer un repaso de los contenidos del curso "*Geometría y Álgebra Lineal 1*" que nos serán más necesarios a lo largo del semestre, a saber, los conceptos y propiedades de: transformaciones lineales, núcleo e imagen, teorema de las dimensiones, matriz asociada a una transformación lineal y cambio de bases.

1. EL CONCEPTO DE TRANSFORMACIÓN LINEAL Y EJEMPLOS

En algunas áreas de la matemática es común el estudio de estructuras y relaciones entre éstas. Por ejemplo, parte del Análisis Matemático consiste en el estudio de conjuntos abiertos y funciones continuas entre dichos conjuntos. Los conjuntos abiertos son conjuntos "con estructura", y las funciones continuas son funciones que "preservan estructura".

En Álgebra Lineal, los conjuntos con estructura que nos interesan son los espacios vectoriales, y las funciones que preservan la estructura de espacio vectorial son las llamadas transformaciones lineales, que definimos a continuación.

Definición 1.1. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (= $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), y $T\colon V \to W$ una función entre ellos. Se dice que T es una **transformación lineal** si se cumplen las siguientes condiciones:

(1) Para todo $v_1, v_2 \in V$, se tiene que
$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2).$$
(2) Para todo $v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que
$$T(\alpha v) = \alpha T(v).$$

Para el caso en el cual $V = W$, a $T\colon V \to V$ se le denomina **operador lineal**.

Se pueden notar a partir de la definición anterior los siguientes resultados.

Proposición 1.2. *Sea $T\colon V \to W$ una función entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales V y W. Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) T es una transformación lineal si, y sólo si,
$$T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2), \tag{i}$$
para todo $v_1, v_2 \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

(2) Si T es una transformación lineal, entonces $T(0_V) = 0_W$.

Ejemplo 1.3. Las afirmaciones hechas en los siguientes ejemplos se dejan como ejercicio.

(1) La función $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$T(x, y, z) = (2x - y + 3z, 7x + 5y - 6z)$$
para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, es una transformación lineal.

(2) Para todo $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, la función identidad $\mathrm{id}\colon V \to V$ es claramente una transformación lineal.

Si W es otro $\mathbb{K}$-espacio vectorial, la función cero $0\colon V \to W$ (que envía a todo vector de V en 0_W) es también una transformación lineal.

(3) Recordemos que $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ denota el $\mathbb{K}$-espacio vectorial de matrices de orden $m \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, digamos

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Considere la función $T_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ dada por

$$T(k_1, \dots, k_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix},$$

para todo $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{K}^n$. Entonces, T es lineal.

Vemos entonces que toda matriz induce una transformación lineal. Más adelante se verá que, de hecho, toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita es de la forma anterior.

(4) Sean $C^0(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y $C^1(\mathbb{R})$ el subespacio de $C^0(\mathbb{R})$ dado por las funciones derivables en $\mathbb{R}$ y con derivada continua. Considere la función $D\colon C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ dada por

$$D(f) = f',$$

para toda $f \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces, D es lineal.

(5) Sea $v_0 \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo. Entonces, la función $T_{v_0}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$T_{v_0}(v) = \langle v_0, v \rangle$$

para todo $v \in \mathbb{R}^3$, es una transformación lineal. Recuerde que $\langle v_0, v\rangle$ denota el producto escalar entre v_0 y v.

(6) La función $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(x) = x + 3,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, *no* es lineal.

Proposición 1.4. *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) Si $T, S\colon V \to W$ son transformaciones lineales entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces la suma $T + S\colon V \to W$ y el producto por un escalar $\alpha \cdot T\colon V \to W$ también lo son.
(2) Si $T\colon V \to W$ y $S\colon W \to U$ son transformaciones lineales entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, entonces la composición $S \circ T\colon V \to U$ también lo es.

2. Subespacios especiales asociados a una transformación lineal

Dada una transformación lineal $T\colon V \to S$, existen un par de conjuntos asociados a T de mucha importancia: el núcleo y la imagen de T, que se definen como sigue.

Definición 2.1. El **núcleo** de T es el subconjunto de V dado por

$$\mathrm{Ker}(T) := \{v \in V \ : \ T(v) = 0_W\}.$$

Es decir, $\mathrm{Ker}(T)$ son dodos los vectores de V que son enviados, a través de T, al elemento neutro de W.[1]

La **imagen** de T se define como el subconjunto de W dado por

$$\mathrm{Im}(T) := \{w \in W \ : \ w = T(v) \text{ para algún } v \in V\}.$$

Otras notaciones para el núcleo y la imagen de T también utilizadas son $N(T)$ y $T(V)$, respectivamente.

Resulta que $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ no son solamente conjuntos, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *Para toda transformación lineal $T\colon V \to W$, las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) $\mathrm{Ker}(T)$ *es un subespacio de* V.
(2) $\mathrm{Im}(T)$ *es un subespacio de* W.

Una aplicación importante de los conceptos de núcleo e imagen es que nos permiten clasificar cuándo una transformación lineal es inyectiva o sobreyectiva.

Definición 2.3. Una transformación lineal $T\colon V \to W$ es **inyectiva** (resp., **sobreyectiva**) si T es inyectiva (resp., sobreyectiva) como función.

Las transformaciones lineales inyectivas son también conocidas como **monomorfismos**. Por otro lado, las transformaciones lineales sobreyectivas también son llamadas **epimorfismos**. Un **isomorfismo** es una transformación lineal $T\colon V \to W$ que es monomorfismo y epimorfismo. En tal caso, diremos que V y W son espacios **isomorfos**.

Tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.4. *Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Las siguientes equivalencias se cumplen.*

(1) T *es un monomorfismo si, y sólo si,* $\mathrm{Ker}(T) = \{0_V\}$.
(2) T *es un epimorfismo si, y sólo si,* $\mathrm{Im}(T) = W$.

Ejemplo 2.5. Supongamos que tenemos un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V de dimensión n, equipado con una base $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$. Luego, para cada $v \in V$, existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ únicos tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

A la n-upla de escalares $(k_1, \dots, k_n)$ se le llaman las **coordenadas** de v en la base $\mathcal{A}$. Esto nos permite definir una función

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{A}}\colon V \to \mathbb{K}^n$$

dada por

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{A}}(v) := (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

para cada $v \in V$. Como ejercicio, demuestre que $\mathrm{coord}_{\mathcal{A}}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

3. Teorema de las dimensiones

El núcleo y la imagen de una transformación lineal están relacionados a través del siguiente resultado.

Teorema 3.1 (de las dimensiones). *Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces,*

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Ejemplo 3.2.

(1) Sea $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = 5y \text{ y } z = 7w\}.$$

Demuestre que T es sobreyectiva.

---

1 La notación $\mathrm{Ker}(T)$ viene de la palabra “kernel”, que significa “núcleo” en Alemán.

Una manera de probar que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Im}(T)$ es verificando que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$, ya que sabemos que $\mathrm{Im}(T)$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$. Esto lo podemos hacer mediante el teorema de las dimensiones. En efecto,

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{R}^4) &= \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))\\ 4 &= \dim(\{(5y, y, 7w, w) \in \mathbb{R}^4 \ : \ y, w \in \mathbb{R}\}) + \dim(\mathrm{Im}(T))\\ 4 &= 2 + \dim(\mathrm{Im}(T))\\ 2 &= \dim(\mathrm{Im}(T)).\end{aligned}$$

(2) Demuestre que no existe una transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ con núcleo igual a

$$\mathrm{Ker}(T) = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x = 3y, \text{ y } z = w = t\}.$$

Supongamos que existe una tal transformación lineal T. Entonces,

$$\begin{aligned}\dim(\mathbb{R}^5) &= \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))\\ 5 &= \dim(\{(3y, y, z, z, z) \in \mathbb{R}^5 \ : \ y, z \in \mathbb{R}\})\\ 5 &= 2 + \dim(\mathrm{Im}(T))\\ 3 &= \dim(\mathrm{Im}(T)).\end{aligned}$$

Lo anterior es una contradicción, pues al ser $\mathrm{Im}(T)$ un subespacio de $\mathbb{R}^2$, forzosamente se tiene que $\dim(\mathrm{Im}(T)) \leq 2$.

Cerramos esta sección con algunas observaciones del teorema de las dimensiones.

Observación 3.3. Sean V y W $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita.

(1) Si $\dim(V) > \dim(W)$, entonces ninguna transformación lineal $T\colon V \to W$ es inyectiva.
En efecto, supongamos que existe una transformación lineal $T\colon V \to W$ inyectiva. Luego, $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$. Entonces, por el teorema de las dimensiones, se tiene que

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Im}(T)) \leq \dim(W),$$

lo cual es una contradicción.

(2) Si $\dim(V) < \dim(W)$, entonces ninguna transformación lineal $T\colon V \to W$ es sobreyectiva.
En caso de existir tal transformación lineal, se tendría que $\dim(W) = \dim(\mathrm{Im}(T))$. Luego, nuevamente por el teorema de las dimensiones, se tiene que

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(W) \geq \dim(W),$$

lo cual es una contradicción.

(3) El teorema de las dimensiones nos da otra forma de calcular el rango de una matriz. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, y considere la transformación lineal $T_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida en el Ejemplo 1.3 (3). Se puede demostrar que

$$\mathrm{rango}(A) = \dim(\mathrm{Im}(T_A)).$$

Luego, por el teorema de las dimensiones, tenemos que

$$\mathrm{rango}(A) = n - \dim(\mathrm{Ker}(T_A)).$$

4. Matriz asociada a una transformación lineal

Supongamos que tenemos dos espacios vectoriales V y W sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Fijamos una base para V y otra para W, llamémoslas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente. Si suponemos que V tiene dimensión n y W dimensión m, entonces pordemos escribir a $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como sigue:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \{v_1, \ldots, v_n\},\\ \mathcal{B} &= \{w_1, \ldots, w_m\}.\end{aligned}$$

Ahora, sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal de V en W. Veamos cómo hallar una representación matricial para T. Por el Ejemplo 2.5, podemos considerar:

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_1)) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_2)) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_n)) = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Todo lo anterior permite obtener una representación matricial para T.

Definición 4.1. La **representación matricial** de $T\colon V \to W$ en las bases $\mathcal{A} \subseteq V$ y $\mathcal{B} \subseteq W$ (o **matriz asociada** a T en las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$) es la matriz

$${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_1)) & \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_2)) & \cdots & \operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_n)) \end{pmatrix}$$

cuya i-ésima columna es el vector $\operatorname{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_i))$.

Veamos ejemplos sobre cómo calcular ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ a partir de T, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dados.

Ejemplo 4.2.

(1) Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y la transformación lineal T_A definida en el Ejemplo 1.3 (3). Note que la matriz asociada a T_A en las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ es precisamente A.

(2) Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por

$$T(x, y, z) = (x + y, 2z - x).$$

(i) Si $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ denota las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, encuentre la matriz de T en $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$.
(ii) Si consideramos las bases $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$, donde

$$v_1 = (1, 0, -1), \qquad v_2 = (1, 1, 1), \qquad v_3 = (1, 0, 0),$$
$$w_1 = (0, 1), \qquad w_2 = (1, 0),$$

encuentre la matriz asociada a T en bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Resolvamos primero lo que concierne a representaciones en bases canónicas. Recordemos que $\mathcal{E}_3$ viene dada por los vectores

$$e_1 = (1, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0), \qquad e_3 = (0, 0, 1);$$

mientras que $\mathcal{E}_2$ viene dada por los vectores

$$\epsilon_1 = (1, 0), \qquad \epsilon_2 = (0, 1).$$

Primero calculamos $T(e_1)$, $T(e_2)$ y $T(e_3)$, y escribimos los resultados en términos $\mathcal{E}_2$.

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (1 + 0, 2 \cdot 0 - 1) = (1, -1) = 1 \cdot (1, 0) + (-1) \cdot (0, 1), \\ T(e_2) &= (0 + 1, 2 \cdot 0 - 0) = (1, 0) = 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1), \\ T(e_3) &= (0 + 0, 2 \cdot 1 - 0) = (0, 2) = 0 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1). \end{aligned}$$

Tenemos entonces los siguientes vectores de coordenadas:

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{E}_2}(T(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{coord}_{\mathcal{E}_2}(T(e_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{coord}_{\mathcal{E}_2}(T(e_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la matriz asociada a T en bases canónicas es:

$${}_{\mathcal{E}_2}((T))_{\mathcal{E}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora que al cambiar las bases a considerar, va a cambiar la matriz de representación de T. Para las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$[2] de la parte (ii), tenemos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= (1+0, 2\cdot(-1)-1) = (1,-3) = -3\cdot(0,1) + 1\cdot(1,0), \\ T(v_2) &= (1+1, 2\cdot 1-1) = (2,1) = 1\cdot(0,1) + 2\cdot(1,0), \\ T(v_3) &= (1+0, 2\cdot 0-1) = (1,-1) = (-1)\cdot(0,1) + 1\cdot(1,0), \end{aligned}$$

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_1)) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_2)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(T(v_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Sea $P\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación lineal dada por

$$P(z_1, z_2) = (z_1, 0).$$

Considere a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, con bases $\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ como la base canónica, y $\mathcal{B}_2 = \{(1,i),(-i,2)\}$. Hallar ${}_{\mathcal{B}_2}((P))_{\mathcal{B}_1}$ y ${}_{\mathcal{B}_1}((P))_{\mathcal{B}_2}$.

Para hallar ${}_{\mathcal{B}_2}((P))_{\mathcal{B}_1}$, tenemos los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} P(1,0) &= (1,0) = 2\cdot(1,i) + (-i)\cdot(-i,2), \\ P(0,1) &= (0,0) = 0\cdot(1,i) + 0\cdot(-i,2), \end{aligned}$$

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}_2}(P(1,0)) = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{B}_2}(P(0,1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$${}_{\mathcal{B}_2}((P))_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para hallar ${}_{\mathcal{B}_1}((P))_{\mathcal{B}_2}$, tenemos:

$$\begin{aligned} P(1,i) &= (1,0) = 1\cdot(1,0) + 0\cdot(0,1), \\ P(-i,2) &= (-i,0) = -i\cdot(1,0) + 0\cdot(0,1), \end{aligned}$$

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}_1}(P(1,i)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{B}_1}(P(-i,2)) = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix},$$

$${}_{\mathcal{B}_1}((P))_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este ejemplo sirve para darnos cuenta que para operadores lineales $T\colon V \to V$, si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de V, entonces el orden de estas bases puede alterar la forma de la matriz asociada de T, es decir, ${}_{\mathcal{B}_2}((T))_{\mathcal{B}_1}$ no necesariamente coincide con ${}_{\mathcal{B}_1}((T))_{\mathcal{B}_2}$.

Dada una transformación lineal $T\colon V \to W$ entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales V y W, con bases $\mathcal{A}$ de V y $\mathcal{B}$ de W, es fácil ver que ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ está completamente determinada por T, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. En otras palabras, y como vimos en uno de los ejemplos, si cambiamos $\mathcal{A}$ por otra base $\mathcal{A}'$ de V y $\mathcal{B}$ por otra base $\mathcal{B}'$ de W, entonces la matriz ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'}$ es diferente a la de ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$. (Más adelante veremos cómo se relacionan estas dos matrices).

Otra cosa que podemos notar es que tenemos una asignación

$$(T, \mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightsquigarrow {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} \in M_{m\times n}(\mathbb{K}).$$

2 Tenga en cuenta que $\mathcal{B}$ no es la base canónica $\mathcal{E}_2$ de $\mathbb{R}^2$. A pesar de que ambas tienen los mismos vectores, el orden en el que aparecen es diferente.

Cabe preguntarse ahora si, en el caso en el que se nos dan ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, es posible hallar la expresión que define a T. Terminamos esta sección dando una respuesta afirmativa a esto.

Ejemplo 4.3. Hallar la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, donde $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ tienes como bases a

$$\mathcal{A} = \{(1,0,1),(2,0,0),(0,1,0)\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B} = \{(2,-1),(0,2)\},$$

y sabiendo que

$${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tomemos un vector arbitrario $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Queremos hallar una fórmula para $T(x,y,z)$ (que sea lineal, por supuesto). Primero, escribimos a (x,y,z) como combinación lineal de los elementos de la base $\mathcal{A}$:

$$(x,y,z) = z \cdot (1,0,1) + \frac{(x-z)}{2} \cdot (2,0,0) + y \cdot (0,1,0).$$

Ahora, aplicamos T a la expresión anterior:

$$T(x,y,z) = z \cdot T(1,0,1) + \frac{(x-z)}{2} \cdot T(2,0,0) + y \cdot T(0,1,0).$$

Entonces, para hallar $T(x,y,z)$, basta con conocer $T(1,0,1)$, $T(2,0,0)$ y $T(0,1,0)$. Aunque no conocemos dichos valores, sí sabemos cuales son sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$ (información que aparece en la matriz ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$):

$$\begin{aligned} T(1,0,1) &= 2 \cdot (2,-1) + 1 \cdot (0,2) = (4,-2) + (0,2) = (4,0), \\ T(2,0,0) &= 3 \cdot (2,-1) + 0 \cdot (0,2) = (6,-3) + (0,0) = (6,-3), \\ T(0,1,0) &= -1 \cdot (2,-1) + 2 \cdot (0,2) = (-2,1) + (0,4) = (-2,5). \end{aligned}$$

Así tenemos:

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= z \cdot (4,0) + \frac{(x-z)}{2} \cdot (6,-3) + y \cdot (-2,5) \\ &= (4z,0) + \left(3x - 3z, \frac{3z-3x}{2}\right) + (-2y,5y) \\ &= \left(3x - 2y + z, -\frac{3}{2}x + 5y + \frac{3}{2}z\right). \end{aligned}$$

Por otro lado, vimos que

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ \frac{x-z}{2} \\ y \end{pmatrix},$$

y así podemos hacer el producto de ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ por este vector, obteniendo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ \frac{x-z}{2} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z + \frac{3}{2}(x-z) - y \\ 2y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3x}{2} - y + \frac{z}{2} \\ 2y + z \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x}{2} - y + \frac{z}{2}\right) \cdot (2,-1) + (2y+z) \cdot (0,2) &= \left(3x - 2y + z, -\frac{3x}{2} + y - \frac{z}{2} + 4y + 2z\right) \\ &= \left(3x - 2y + z, -\frac{3}{2}x + 5y + \frac{3}{2}z\right). \\ &= T(x,y,z). \end{aligned}$$

Lo que ocurre al final del ejercicio anterior se debe a un resultado más abstracto, enunciado a continuación, que nos dice cómo obtener las coordenadas de $T(v)$ en la base $\mathcal{B}$, conociendo las coordenadas de v en la base $\mathcal{A}$ y la matriz asociada ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$.

Teorema 4.4. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y con bases

$$\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V \text{ y } \mathcal{B} = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\} \subseteq W.$$

Para toda transformación lineal $T \colon V \to W$, se cumple la siguiente igualdad:

$$\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(T(v)) = {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} \cdot \mathrm{coord}_{\mathcal{A}}(v).$$

5. Operaciones entre transformaciones lineales vs. operaciones entre matrices

Sabemos que dadas dos transformaciones lineales $T, S \colon V \to W$, podemos formar una nueva transformación lineal $T + S \colon V \to W$. Si se nos dan bases $\mathcal{A}$ de V y $\mathcal{B}$ de W, sabemos que podemos hallar la matriz asociada a $T + S$ en bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Lo interesante aquí es que, en lugar de calcular ${}_{\mathcal{B}}((T+S))_{\mathcal{A}}$ con el procedimiento mostrado anteriormente, podemos hallar esta matriz simplemente sumando las matrices ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ y ${}_{\mathcal{B}}((S))_{\mathcal{A}}$. Algo similar para con la transformación lineal $\alpha \cdot T$, para cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, y la matriz ${}_{\mathcal{B}}((\alpha \cdot T))_{\mathcal{A}}$. De manera más específica, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.1. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con bases $\mathcal{A} \subseteq V$ y $\mathcal{B} \subseteq W$. Dadas dos transformaciones lineales $T, S \colon V \to W$ y un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, las matrices asociadas a las transformaciones

$$\begin{aligned} T + S \colon V &\to W, & \alpha \cdot T \colon V &\to W, \\ v &\mapsto (T+S)(v) := T(v) + S(v), & v &\mapsto (\alpha \cdot T)(v) := \alpha \cdot T(v), \end{aligned}$$

vienen dadas por:

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{B}}((T+S))_{\mathcal{A}} &= {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} + {}_{\mathcal{B}}((S))_{\mathcal{A}}, \\ {}_{\mathcal{B}}((\alpha \cdot T))_{\mathcal{A}} &= \alpha \cdot {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}, \end{aligned}$$

donde las operaciones que salen a la derecha son la suma de matrices y la multiplicación de una matriz por un escalar.

Ahora consideremos la situación en la que tenemos dos transformaciones lineales $T \colon V \to W$ y $S \colon W \to U$ donde V, W y U tienen bases $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, respectivamente. Podemos hallar la matriz asociada en bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ de la composición $S \circ T \colon V \to U$, mediante el producto de las matrices asociadas de T y S. Específicamente, tenemos lo siguiente.

Teorema 5.2. Sean V, W y U $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con bases $\mathcal{A} \subseteq V$, $\mathcal{B} \subseteq W$ y $\mathcal{C} \subseteq U$. Si $T \colon V \to W$ y $S \colon W \to U$ son transformaciones lineales con matrices asociadas ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ y ${}_{\mathcal{C}}((S))_{\mathcal{B}}$, entonces la matriz asociada a $S \circ T \colon V \to U$ en bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ viene dada por:

$${}_{\mathcal{C}}((S \circ T))_{\mathcal{A}} = {}_{\mathcal{C}}((S))_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}},$$

donde el producto que aparece a la derecha es el producto usual de matrices.

Corolario 5.3. Sea $T \colon V \to W$ un isomorfismo, $\mathcal{A}$ una base de V y $\mathcal{B}$ una base de W. Entonces, ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ es invertible, y la matriz asociada a la transformación lineal inversa $T^{-1} \colon W \to V$ en bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ viene dada por

$${}_{\mathcal{A}}((T^{-1}))_{\mathcal{B}} = ({}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}})^{-1}.$$

6. Cambio de bases

En la sección anterior estudiamos cómo hallar las coordenadas de $T(v)$ en una base teniendo la matriz asociada a T y las coordenadas de v relativas a una base del dominio de T. Ahora nos centraremos en la situación más simple en donde sólo trabajaremos con un espacio vectorial V, pero para el cual consideraremos dos bases diferentes $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$. El problema aquí será cómo conocer las coordenadas de $v \in V$ respecto a $\mathcal{A}'$ si conocemos las coordenadas de v respecto a $\mathcal{A}$. Veremos que esto será un caso particular del Teorema 4.4 haciendo $T = \mathrm{id}_V$ (la identidad sobre V).

Sean entonces $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\mathcal{A}' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ dos bases del $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Tomamos $v_j \in \mathcal{A}$, para el cual existen $a_{ij} \in \mathbb{K}$, con $1 \leq i \leq n$, tales que

$$v_j = a_{1j}v_1' + a_{2j}v_2' + \cdots + a_{nj}v_n'.$$

Es decir,

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}(v_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}. \tag{i}$$

Notamos además que si consideramos la tranformación lineal identidad $V \to V$, donde tomamos $\mathcal{A}$ como base del dominio y $\mathcal{A}'$ como base del codominio (es decir, $\mathrm{id}_V\colon (V, \mathcal{A}) \to (V, \mathcal{A}')$), entonces

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}(v_j) = \operatorname{cood}_{\mathcal{A}'}(I(v_i)),$$

por lo que al colocar (i) como columnas de una matriz, nos da la matriz ${}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}}$. Esta matriz asociada a I en bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ tiene un nombre particular, que presentamos a continuación.

Definición 6.1. Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V con bases

$$\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \ \text{ y } \ \mathcal{A}' = \{v_1', v_2', \dots, v_n'\},$$

a la matriz

$${}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}(v_1) & \operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}(v_2) & \cdots & \operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}(v_n) \end{pmatrix}$$

se le conoce como la **matriz de cambio** de la base $\mathcal{A}$ a la base $\mathcal{A}'$.

Lo siguiente es una consecuencia del Teorema 4.4, y nos dice cómo obtener las coordenadas de cualquier vector $v \in V$ respecto a la base $\mathcal{A}'$, si conocemos sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{A}$.

Corolario 6.2. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ dos bases de un espacio vectorial V. Entonces, para cualquier $v \in V$, se tiene*

$$\operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}(v) = {}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} \cdot \operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(v) \ \text{ y } \ \operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(v) = \operatorname{coord}_{\mathcal{A}}((I))_{\mathcal{A}'} \cdot \operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}(v).$$

Ejemplo 6.3.

(1) Consideremos a $\mathbb{R}^3$ con la base canónica $\mathcal{A} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$, y el conjunto

$$\mathcal{A}' = \{(1,0,2), (3,-1,0), (0,1,-2)\}.$$

Verificar que $\mathcal{A}'$ es una base de $\mathbb{R}^3$, y hallar las coordenadas de cualquier $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ en la base $\mathcal{A}'$.

Para verificar que $\mathcal{A}'$ es una base de $\mathbb{R}^3$, basta colocar los elementos de $\mathcal{A}'$ como columnas de una matriz, calcularle su determinante y ver que es diferente de 0.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \\ &= ((-1)(-2) - 1 \cdot 0) - 3 \cdot (0 \cdot (-2) - 1 \cdot 2) \\ &= 2 - 3(-2) = 2 + 6 = 8 \neq 0. \end{aligned}$$

Sabemos que las coordenadas de $v = (x,y,z)$ respecto a $\mathcal{A}$ son x, y y z (en este orden). Entonces, para conocer las coordenadas de v respecto a $\mathcal{A}'$, podemos calcularlas directamente, o usar la expresión $\operatorname{coord}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} \cdot \operatorname{coord}_{\mathcal{A}}(v)$.

$$(1,0,0) = \frac{1}{4}\cdot(1,0,2) + \frac{1}{4}\cdot(3,-1,0) + \frac{1}{4}\cdot(0,1,-2), \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{A}'}(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix},$$

$$(0,1,0) = \frac{3}{4}\cdot(1,0,2) - \frac{1}{4}\cdot(3,-1,0) + \frac{3}{4}\cdot(0,1,-2), \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{A}'}(0,1,0) = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

$$(0,0,1) = \frac{3}{8}\cdot(1,0,2) - \frac{1}{8}\cdot(3,-1,0) - \frac{1}{8}\cdot(0,1,-2), \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{A}'}(0,0,1) = \begin{pmatrix} 3/8 \\ -1/8 \\ -1/8 \end{pmatrix}.$$

Así:

$$_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 3/8 \\ 1/4 & -1/4 & -1/8 \\ 1/4 & 3/4 & -1/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \mathrm{coord}_{\mathcal{A}'}(x,y,z) &= {}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} \cdot \mathrm{coord}_{\mathcal{A}}(x,y,z) \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2x+6y+3z \\ 2x-2y-z \\ 2x+6y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{4}+\frac{3y}{4}+\frac{3z}{8} \\ \frac{x}{4}-\frac{y}{4}-\frac{z}{8} \\ \frac{x}{4}+\frac{3y}{4}-\frac{z}{8} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$(x,y,z) = \left(\frac{x}{4}+\frac{3y}{4}+\frac{3z}{8}\right)(1,0,2) + \left(\frac{x}{4}-\frac{y}{4}-\frac{z}{8}\right)(3,-1,0) + \left(\frac{x}{4}+\frac{3y}{4}-\frac{z}{8}\right)(0,1,-2)$$

(2) Consideremos el espacio $\mathcal{P}_2$ de polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ y grado menor o igual a 2. Sea $\mathcal{A} = \{1, x, x^2\}$ la base canónica de $\mathcal{P}_2$ y $\mathcal{A}' = \{4x-1, 2x^2-x, 3x^2+3\}$. Verifique que $\mathcal{A}'$ es una base de $\mathcal{P}_2$, y calcule las coordenadas de cualquier $p \in \mathcal{P}_2$ en la base $\mathcal{A}'$.

Para verificar que $\mathcal{A}'$ es una base de $\mathcal{P}_2$, calculamos las coordenadas de los elementos de $\mathcal{A}'$ respecto a $\mathcal{A}$, con los vectores columna resultantes formamos una matriz, y verificamos que su determinante es diferente de cero.

$$4x-1 = -1\cdot 1 + 4\cdot x + 0\cdot x^2, \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{A}}(4x-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$2x^2-x = 0\cdot 1 + (-1)\cdot x + 2\cdot x^2, \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{A}}(2x^2-x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$3x^2+3 = 3\cdot 1 + 0\cdot x + 3\cdot x^2, \qquad \mathrm{coord}_{\mathcal{A}}(4x-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -1\cdot\det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 3\cdot\det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -1(-3) + 3\cdot 12 = 39 \neq 0.$$

Entonces, $\mathcal{A}'$ es una base de $\mathcal{P}_2$.

Notamos que

$$_{\mathcal{A}}((I))_{\mathcal{A}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

por lo que para obtener ${}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}}$, simplemente calculamos la inversa de la matriz anterior.

$$ {}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} = ({}_{\mathcal{A}}((I))_{\mathcal{A}'})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}. $$

Entonces, dado $p(x) = a + bx + cx^2$, tenemos:

$$ \begin{aligned} \mathrm{coord}_{\mathcal{A}'}(p) = {}_{\mathcal{A}'}((I))_{\mathcal{A}} \cdot \mathrm{coord}_{\mathcal{A}}(p) &= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3a}{27} + \frac{6b}{27} + \frac{3c}{27} \\ -\frac{12a}{27} - \frac{3b}{27} + \frac{12c}{27} \\ \frac{8a}{27} + \frac{2b}{27} + \frac{c}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{9} + \frac{2b}{9} + \frac{c}{9} \\ -\frac{4a}{9} - \frac{b}{9} + \frac{4c}{9} \\ \frac{8a}{27} + \frac{2b}{27} + \frac{c}{27} \end{pmatrix}, \end{aligned} $$

$$ p(x) = \frac{1}{9}(a + 2b + c)(4x - 1) + \frac{1}{9}(-4a - b + 4c)(2x^2 - x) + \frac{1}{27}(8a + 2b + c)(3x^2 + 3). $$

Ahora que sabemos cómo cambiar las coordenadas de un vector entre dos bases, estudiaremos cómo cambia la matriz asociada a una transformación lineal $T\colon V \to W$ cuando se tienen dos bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ de V, y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de W.

Teorema 6.4. Sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ dos bases de V, y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de W. Entonces, si conocemos la matriz ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ de T en bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, podemos conocer la matriz ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'}$ de T en bases $\mathcal{A}'$ y $\mathcal{B}'$ mediante la siguiente expresión:

$$ {}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{B}'}((\mathrm{id}_W))_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'}, $$

donde $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ y $\mathrm{id}_W\colon W \to W$ son las transformaciones lineales identidad sobre V y W, respectivamente.

Cerramos esta sección presentando un par de propiedades de la matriz asociada a la transformación identidad. La primera de ellas es inmediata y la segunda (la cual usamos en el ejemplo anterior) es consecuencia del Corolario 5.3.

Proposición 6.5. *Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, con bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$, y sea $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ la transformación lineal identidad sobre V. Entonces, las siguientes condiciones se cumplen:*

(1) ${}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}} = I_n$, donde I_n denota la matriz identidad de orden n.
(2) ${}_{\mathcal{A}'}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}}$ es invertible, y $({}_{\mathcal{A}'}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}})^{-1} = {}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'}$.

7. Matrices semejantes

En el Teorema 6.4 vimos la igualdad ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{B}'}((\mathrm{id}_W))_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'}$. Hablando de manera muy informal, podríamos decir que las matrices ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'}$ y ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ se parecen, pues ${}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'}$ y ${}_{\mathcal{B}'}((\mathrm{id}_W))_{\mathcal{B}}$ son matrices invertibles asociadas a operadores identidad. De hecho, ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'}$ y ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ comparten algunos de sus valores importantes, como lo son su determinante y traza (en el sentido de que estos coinciden). Al parecer, el determinate y la traza son un tipo de invariantes asociados a matrices de la forma ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'}$ y ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$. De hecho, esto último sigue siendo cierto cuando se define determinada relación entre matrices cuadradas (no necesariamente asociadas a una transformación lineal). Dicha relación se conoce en álgebra lineal como *semejanza*.

Definición 7.1. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ dos matrices cuadradas de orden n. Diremos que A y B son **semejantes** si existe una matriz invertible $P \in M_n(\mathbb{K})$ tal que

$$ B = P^{-1} \cdot A \cdot P. $$

Ejemplo 7.2.

(1) Aunque sirvió para motivar el concepto de semejanza, ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'}$ y ${}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}}$ no necesariamente son semejantes, pues aunque ${}_{\mathcal{B}'}((T))_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{B}'}((\mathrm{id}_W))_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'}$, la matriz ${}_{\mathcal{B}'}((\mathrm{id}_W))_{\mathcal{B}}$ no tiene por qué ser la inversa de ${}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'}$.

Pero supongamos que tenemos un operador $T\colon V \to V$ donde en V consideramos dos bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$. Entonces,
$$ {}_{\mathcal{A}}((T))_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'} \cdot {}_{\mathcal{A}'}((T))_{\mathcal{A}} \cdot {}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'}, $$
donde ${}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'} = ({}_{\mathcal{A}}((\mathrm{id}_V))_{\mathcal{A}'})^{-1}$, por lo que ${}_{\mathcal{A}}((T))_{\mathcal{A}'}$ y ${}_{\mathcal{A}'}((T))_{\mathcal{A}}$ sí son semejantes.

(2) Las matrices
$$ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} $$
son semejantes, ya que $B = P^{-1}AP$, donde
$$ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} $$
es invertible y
$$ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. $$

(3) Sea θ un número real. Entonces, las matrices
$$ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} $$
son semejantes, donde $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)$.

El concepto de semejanza entre matrices está estrechamente relacionado con el de representación matricial de operadores lineales. En efecto, ya vimos en la parte 1. del ejemplo anterior que si $T\colon V \to V$ es un operador lineal sobre V y si se consideran dos bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ de V, entonces ${}_{\mathcal{A}}((T))_{\mathcal{A}'}$ y ${}_{\mathcal{A}'}((T))_{\mathcal{A}}$ son semejantes.

Ahora, si tenemos dos matrices semejantes A y B de orden n y con coeficientes en $\mathbb{K}$, podemos escribir tanto A como B como matrices asociadas a un mismo operador lineal. En efecto, dicho operador podemos definirlo como
$$ \begin{aligned} T\colon \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto A \cdot x \end{aligned} $$
donde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Es fácil ver que
$$ A = {}_{\mathcal{E}}((T))_{\mathcal{E}}, $$
donde $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$. Ahora, como A y B son semejantes, sabemos que existe una matriz invertible $P \in M_n(\mathbb{K})$ tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Dado que la matriz P es invertible, tenemos que el conjunto $\mathcal{B} = \{P \cdot e_1, \dots, P \cdot e_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$. Más aún, podemos ver que $P = {}_{\mathcal{E}}((\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}))_{\mathcal{U}}$, por lo cual $P^{-1} = {}_{\mathcal{U}}((\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}))_{\mathcal{E}}$. Por lo tanto, por el Teorema 6.4, tenemos:
$$ B = P^{-1} \cdot A \cdot P = {}_{\mathcal{U}}((\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}))_{\mathcal{E}} \cdot {}_{\mathcal{E}}((T))_{\mathcal{E}} \cdot {}_{\mathcal{E}}((\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}))_{\mathcal{U}} = {}_{\mathcal{U}}((T))_{\mathcal{U}}. $$

Esto se especifica en el siguiente resultado.

Teorema 7.3. *Dadas dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Entonces, A y B son semejantes si, y solamente si, A y B son matrices asociadas a un mismo operador lineal sobre $\mathbb{K}^n$; es decir, existe un operador lineal $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ y bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ tales que $A = {}_{\mathcal{A}}((T))_{\mathcal{A}}$ y $B = {}_{\mathcal{B}}((T))_{\mathcal{B}}$.*

Al principio de esta sección comentamos que tanto la traza como el determinante de matrices son invariantes bajo la relación de semejanza. Para explicar mejor en qué significa esto, supongamos de nuevo que tenemos la situación

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

Para cualquier par de matrices cuadradas M y N (del mismo orden), recordamos por propiedades del determinante y de la traza que $\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$ y $\operatorname{tr}(M \cdot N) = \operatorname{tr}(N \cdot M)$. Entonces, para el caso que nos compete, tenemos:

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P) = (\det(P))^{-1} \cdot \det(A) \cdot \det(P) \\ &= \det(A), \\ \operatorname{tr}(B) &= \operatorname{tr}(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \operatorname{tr}(A \cdot P^{-1} \cdot P) \\ &= \operatorname{tr}(A). \end{aligned}$$

Resumamos esto en el siguiente resultado.

Teorema 7.4. *Sean A y B dos matrices semejantes en $M_n(\mathbb{K})$. Entonces, las siguientes propiedades se cumplen:*

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A) &= \operatorname{rg}(B), \\ \det(A) &= \det(B), \\ \operatorname{tr}(A) &= \operatorname{tr}(B), \end{aligned}$$

donde $\operatorname{rg}(A)$ denota el rango de la matriz A (número máximo de filas de A que son linealmente independientes).

(M. A. Pérez) INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA "PROF. ING. RAFAEL LAGUARDIA". FACULTAD DE INGENIERÍA. UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA. MONTEVIDEO 11300. URUGUAY

Email address: mperez@fing.edu.uy