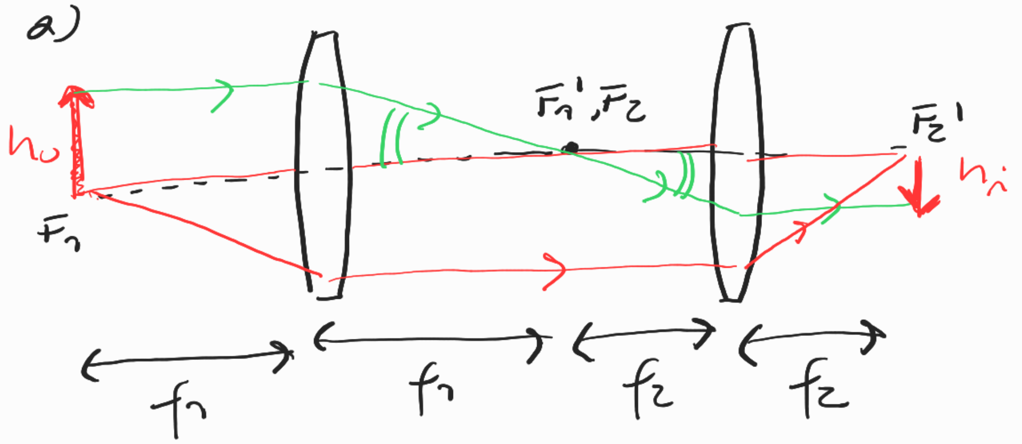
Óptica, Examen, 23 febrero 2023

Ej 1) a)



- Un pto. del objeto sobre F_1 tiene imagen en F_2' (trazado de rayos en rojo)
- A partir de un rayo horizontal (en verde) desde el otro extremo del objeto, hallamos la magnificación:

$$\boxed{m_L = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{f_2}{f_1}}$$

(triángulos semejantes con vértice común en F_1')

b) Consideremos primero la matriz del sistema entre los planos por F_1 y F_2':

$$M_{F_1F_2'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f_2^{-1} & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ -f_2^{-1} & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & f_1+f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -f_1^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ -f_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ -f_2^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & f_1+f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ -f_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}}$$

$$m_L \quad \begin{pmatrix} -f_2/f_1 & 0 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{pmatrix} \quad (F_1 \text{ y } F_2' \text{ conjugados})$$

$f_{eq} \to \infty$: sistema afocal

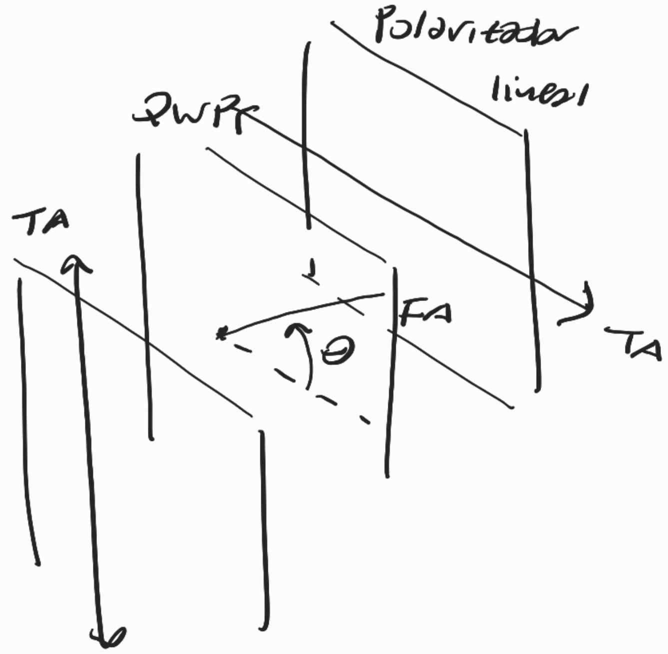
La matriz para el sistema completo es:

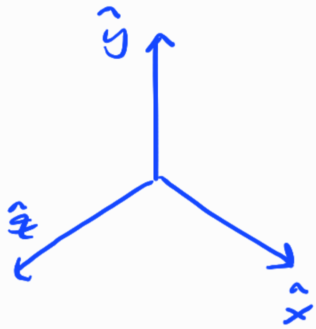
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M_{F_1F_2'} \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_2/f_1 & -\left(\frac{f_2}{f_1}z + \frac{f_1}{f_2}z'\right) \\ 0 & -f_1/f_2 \end{pmatrix}$$

La condición de conjugación es $B=0$: $\boxed{z' = -\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 z}$

y la magnificación lateral es: $A = -f_2/f_1$ (independiente de la posición del objeto)

Ej2) a)

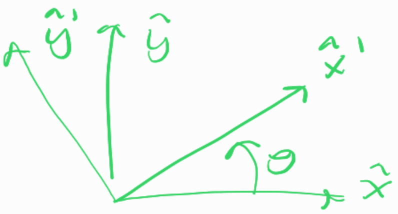




La matriz de Jones del sistema es:

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{polarizador lineal, eje de transmisión vertical}} R^T(\theta)\, \underbrace{e^{-j\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}}_{\text{QWP, eje rápido horizontal}} R(\theta) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{polarizador lineal, eje de transmisión horizontal}}$$

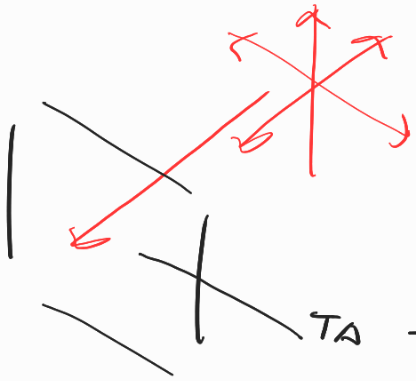
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$, matriz de rotación de la base $\{\hat{x}, \hat{y}\}$ a la base $\{\hat{x}', \hat{y}'\}$



$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} e^{-j\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{e^{-j\pi/4} \begin{pmatrix} \cos^2\theta + j\operatorname{sen}^2\theta & (1-j)\operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ (1-j)\operatorname{sen}\theta\cos\theta & \operatorname{sen}^2\theta + j\cos^2\theta \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{J} = e^{-j\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-j)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

b)



no polarizada, intensidad I_0

TA $\longrightarrow$ A la salida tengo luz polarizada linealmente según TA y con intensidad $\frac{1}{2} I_0 \longleftrightarrow$ entrada lineal horizontal de intensidad $\frac{1}{2} I_0$

$\Rightarrow$ Puedo trabajar con una entrada así:

$$E_{in} = \sqrt{\frac{1}{2} I_0}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

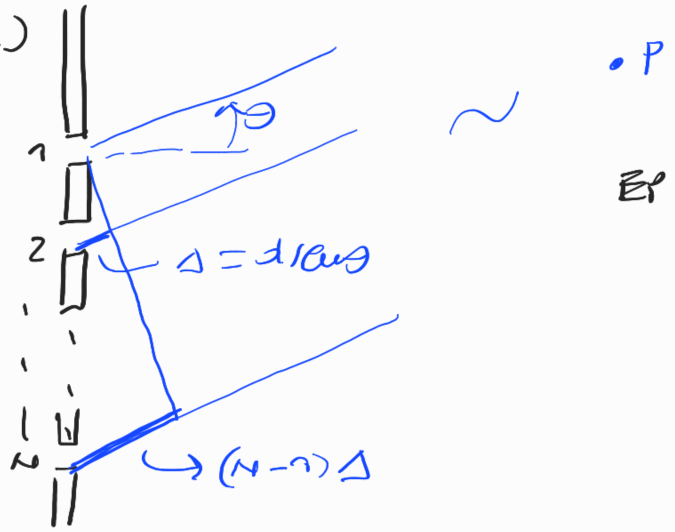
$$E_{out} = \mathbb{J}\,E_{in} = e^{-j\pi/4}\sqrt{\frac{1}{2} I_0}\begin{pmatrix} 0 \\ (1-j)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

y la transmitancia del sistema es:

$$T = \frac{I_{out}}{I_0} = \frac{E_{out}\cdot E_{out}^{*}}{I_0} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{I_0}\,|1-j|^2(\text{sen}\,\theta\cos\theta)^2}{\cancel{I_0}}$$

$$= \text{sen}^2\theta\cos^2\theta = \boxed{\frac{1}{4}\text{sen}^2 2\theta}$$

Ej 3) a)



$$E_P = E_1 + E_2 + \cdots + E_N$$

$$E_P = \frac{A_0^{(1)}}{r_1} e^{j(\omega t - k r_1)} + \frac{A_0^{(2)}}{r_2} e^{j(\omega t - k r_2)} + \cdots + \frac{A_0^{(N)}}{r_N} e^{j(\omega t - k r_N)}$$

$$\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

$$\simeq \frac{A_0^{(1)}}{r_1} e^{j(\omega t - k r_1)} \underbrace{\left[1 + e^{-jk\underbrace{(r_2 - r_1)}_{\Delta}} + \cdots e^{-jk\underbrace{(r_N - r_1)}_{(N-1)\Delta}}\right]}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-jk\Delta}\right)^n = \frac{1 - e^{-jkN\Delta}}{1 - e^{-jk\Delta}} =$$

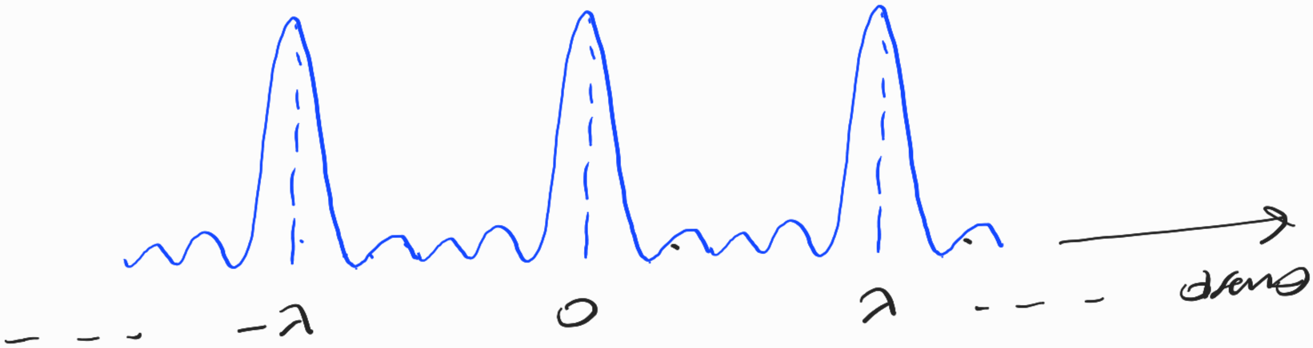
$$= \frac{e^{-jkN\Delta/2}}{e^{-jk\Delta/2}} \underbrace{\left(\frac{e^{jkN\Delta/2} - e^{-jkN\Delta/2}}{e^{jk\Delta/2} - e^{-jk\Delta/2}}\right)}_{\frac{\operatorname{sen}(Nk\Delta/2)}{\operatorname{sen}(k\Delta/2)}}$$

$$\Rightarrow I_p \propto E_P E_P^* = I_0 \frac{\operatorname{sen}^2(Nk\Delta/2)}{\operatorname{sen}^2(k\Delta/2)}$$

(intensidad de una fuente individual)

$$I_P(\theta) = I_0 \left(\frac{\text{sen}(N\pi d\,\text{sen}\theta/\lambda)}{\text{sen}(\pi d\,\text{sen}\theta/\lambda)}\right)^2$$

máximos principales: $d\,\text{sen}\theta_m = m\lambda$, m entero



b) El solapamiento puede ocurrir ya que para una fuente policromática el producto $d\,\text{sen}\theta$ puede corresponder a diferentes combinaciones $m\lambda$ (λ para $m=1$, $\frac{\lambda}{2}$ para $m=2$, etc)

Si λ_{min} es la mínima longitud de onda en el espectro, la máxima longitud de onda sin solapamiento en el orden m : $\lambda^m_{n.o.}$ es coincidente con el comienzo del espectro en el orden $m+1$:

$$m\lambda^m_{n.o.} = (m+1)\lambda_{min}$$

y el rango espectral libre del orden m está dado por:

$$\lambda^m_{fsr} = \lambda^m_{n.o.} - \lambda_{min} = \boxed{\frac{\lambda_{min}}{m}}$$

Para $\lambda_{min} = 400\,nm$:

$$\lambda^1_{fsr} = \frac{400\,nm}{1} = 400\,nm$$ (sin solapamiento entre 400 y 800nm)

$$\lambda^2_{fsr} = \frac{400\,nm}{2} = 200\,nm$$ (entre 400 y 600 nm)

$$\lambda^3_{fsr} = \frac{400\,nm}{3} = 133\,nm$$ (entre 400 y 533nm)

(Obs: si la fuente emite en el visible, su espectro sólo se puede ver sin solapamiento en $m=1$)