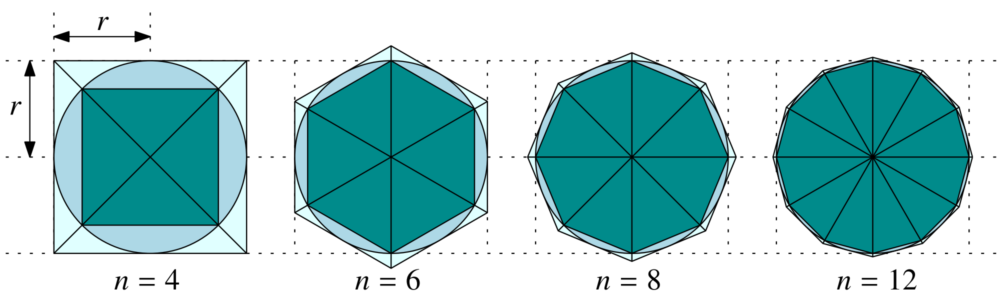
Integrales

Cálculo diferencial e integral en una variable

1. Introducción

La teoría de la integración es una herramienta fundamental para calcular las áreas de las regiones del plano definidas a partir de curvas. Sus orígenes se remontan a más de 2300 años, cuando los matemáticos griegos calculaban áreas por el método de *exhaución*[1]. Este método consistía en aproximar las figuras curvas (tales como los círculos, las elipses o las parábolas) por polígonos para obtener aproximaciones del área de dichas figuras. Por ejemplo, la siguiente figura muestra cómo se puede aproximar un círculo por pares de polígonos regulares (uno adentro, y otro afuera), para obtener aproximaciones por defecto y por exceso de su área:



Los matemáticos griegos también usaron el mismo método con éxito para calcular los volúmenes de sólidos tales como las esferas, los cilindros o los conos, aproximándolos por poliedros.

El cálculo integral moderno apareció al final del siglo XVII, cuando el matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) descubrió un vínculo sorprendente entre la integración y la derivación[2]. Sin embargo, la definición de Leibniz carecía de una fundamentación rigurosa, pues le faltaba una definición precisa de los números reales. (De hecho, las nociones fundamentales de ínfimo y de supremo, así como el axioma de completitud, fueron introducidos recién en la primera mitad del siglo XIX.) La primera formalización rigurosa de la teoría de la integración fue dada por el matemático alemán Bernhard Riemann (1826–1866), y es esencialmente ésta la que vamos a presentar en este capítulo[3].

[1]El método de exhaución fue introducido por Eudoxo de Cnido (390–337 a. C.) y completado por Arquímedes de Siracusa (287–212 a. C.), quienes lo usaron para calcular múltiples áreas y volúmenes.

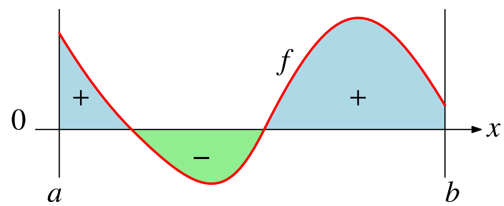
[2]Este vínculo es el objeto del *teorema fundamental del cálculo*, que veremos más adelante en este curso. En este capítulo, sólo nos interesaremos por el problema que consiste en definir rigurosamente la noción de área.

[3]Existe otra teoría de la integración, debida al matemático francés Henri Lebesgue (1875–1941), que permite integrar más funciones, y que constituye hoy el marco de referencia de la teoría de la integración. En este curso, nos restringiremos a la teoría de Riemann, cuyas definiciones son más sencillas y que es (más que) suficiente para las necesidades de este curso introductorio.

2. Integral de una función

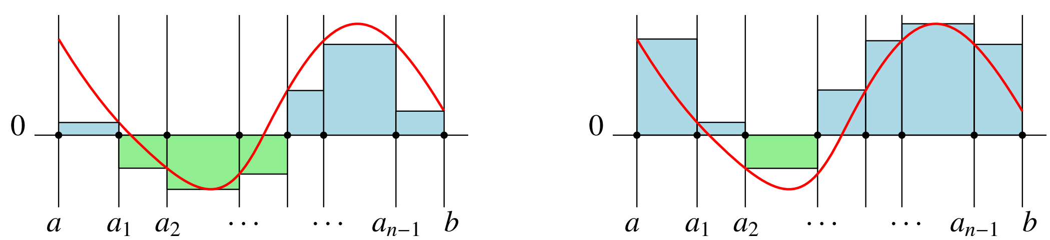
2.1. Objetivo y método

El problema de la teoría de la integración es el siguiente: dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$), ¿cómo medir el área algebraica de la región del plano ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f?



Por *área algebraica*, se entiende el número real (positivo, negativo o nulo) obtenido contando con un signo positivo las áreas por encima del eje x, y con un signo negativo las áreas por debajo del eje x, como indicado en la figura anterior[4]. En matemática, el área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de f se llama *integral* de la función f en el intervalo $[a, b]$, y el proceso que permite determinar dicha área se llama *integración*.

El método Para determinar la integral de la función f en el intervalo $[a, b]$, el método de Riemann consiste en aproximar (por defecto y por exceso) la región correspondiente por regiones poligonales construidas a partir de rectángulos, y cuya área (algebraica) se calcula fácilmente sumando las áreas (algebraicas) de dichos rectángulos[5] (Sección 2.3):



Formalmente, cada par de aproximaciones (una por defecto y otra por exceso) es construido a partir de una *partición* $P = \{a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b\}$ del intervalo $[a, b]$ (Sección 2.2), cuyos puntos definen los límites horizontales de los rectángulos que usaremos para construir dichas aproximaciones. Considerando particiones cada vez más finas del intervalo $[a, b]$, se obtienen aproximaciones cada vez más precisas del área deseada, la cual puede ser definida como el "límite" (Sección 2.4) de las áreas de todas las aproximaciones así definidas.

[4]El *área algebraica* de la región ubicada entre entre el eje x y la gráfica de la función f tiene propiedades algebraicas mucho mejores que el *área geométrica* correspondiente (obtenida contando todas las áreas involucradas con un signo positivo), y es la razón por qué la teoría de la integración sólo considera ésa. Por otro lado, ambas nociones de área (algebraica y geométrica) coinciden para las funciones positivas o nulas, y cuando se trata de calcular el área geométrica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de un función f con un signo cualquiera, basta con remplazar la función f por la función $x \mapsto |f(x)|$ (véase Sección 3.3).

[5] El área algebraica de un rectángulo de ancho $\ell > 0$ (positivo) y de altura $L \in \mathbb{R}$ (algebraica) es el producto $\ell \times L$. Este producto es positivo, negativo o nulo según si la altura algebraica L es positiva, negativa o nula (siendo el ancho positivo, por convención).

2.2. Particiones de un intervalo

Definición 1 (Partición de un intervalo)**.** Sea un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, con $a < b$. Se llama *partición* de $[a, b]$ a todo subconjunto finito $P \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ y $b \in P$.

Notación 2. En lo siguiente, escribiremos sistemáticamente las particiones P del intervalo $[a, b]$ ordenando sus elementos de modo creciente; es decir: de la forma

$$P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}, \quad \text{con } a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\,.$$

Intuitivamente, una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ del intervalo $[a, b]$ sirve para descomponer dicho intervalo en una unión finita de subintervalos esencialmente disjuntos[6]:

$$[a, b] \;=\; [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{n-1}, a_n]\,.$$

Definición 3 (Orden entre las particiones)**.** Las particiones de un intervalo $[a, b]$ están ordenadas por el orden de la inclusión. Así, dadas dos particiones P y Q del intervalo $[a, b]$ tales que $P \subset Q$, se dice que Q es *más fina* que P, o que P es *más gruesa* que Q.

Observación 4 (Relación de orden parcial)**.** La relación de inclusión entre las particiones del intervalo $[a, b]$ es una *relación de orden parcial*, en el sentido de que es una relación

- ***reflexiva***: $P \subset P$
- ***transitiva***: si $P \subset Q$ y $Q \subset R$, entonces $P \subset R$
- ***antisimétrica***: si $P \subset Q$ y $Q \subset P$, entonces $P = Q$.

(para todas las particiones $P, Q, R \subset [a, b]$). Por otro lado, esta relación no es una relación de orden total (al contrario de la relación de orden usual sobre los números reales[7]), pues existen pares de particiones no comparables, como lo muestra el siguiente ejemplo:

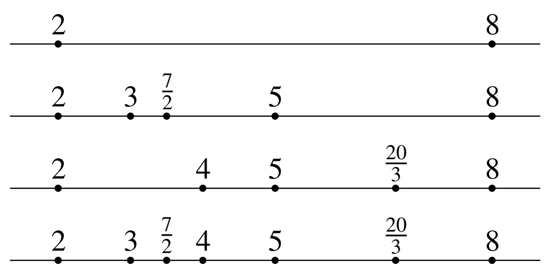
Ejemplo 5. Sean las siguientes cuatro particiones del intervalo $[2, 8]$:

$P_0 = \{2, 8\}$

$P_1 = \{2, 3, \frac{7}{2}, 5, 8\}$

$P_2 = \{2, 4, 5, \frac{20}{3}, 8\}$

$P_3 = \{2, 3, \frac{7}{2}, 4, 5, \frac{20}{3}, 8\}$



Se observa que $P_0 = \{2, 8\}$ es la partición más gruesa del intervalo $[2, 8]$, pues está incluida en cualquier otra partición de $[2, 8]$. En particular, está incluida en las particiones P_1, P_2 y P_3. Por otro lado, las particiones P_1 y P_2 no son comparables, pues $P_1 \not\subset P_2$ y $P_2 \not\subset P_1$ (aunque tengan tres elementos comunes: 2, 5 y 8). Finalmente, se observa que la partición $P_3 = P_1 \cup P_2$ es más fina que las particiones P_0, P_1 y P_2, pues $P_0 \subset P_1 \subset P_3$ y $P_0 \subset P_2 \subset P_3$.

[6] Es decir: subintervalos que no se intersectan, salvo quizás en sus puntos extremos.

[7] Recordemos que para todos los números reales x e y, tenemos que $x \leq y$ o $y \leq x$ («o» inclusivo).

Observaciones 6. (1) Dado un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (con $a < b$), se observa más generalmente que el conjunto $P_0 = \{a, b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$: es la partición más gruesa de $[a, b]$, pues $P_0 \subset P$ para toda partición $P \subset [a, b]$.

(2) Dadas dos particiones $P_1, P_2 \subset [a, b]$, su unión $P_1 \cup P_2$ también es una partición de $[a, b]$, que es más fina que P_1 y P_2 a la vez: $P_1 \subset P_1 \cup P_2$ y $P_2 \subset P_1 \cup P_2$. Se dice que la unión $P_1 \cup P_2$ es el *refinamiento común* de las dos particiones P_1 y P_2.

Definición 7 (Norma de una partición)**.** Dada una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ del intervalo $[a, b]$, se llama *norma* de P y se escribe $\|P\|$ a la longitud del subintervalo $[a_i, a_{i+1}] \subset [a, b]$ más grande ($0 \leq i < n$) definido por la partición P:

$$\|P\| \ = \ \max_{i=0..n-1} (a_{i+1} - a_i)$$

Por construcción, tenemos que: $\quad 0 < \|P\| \leq b - a$.

Observación 8. Dadas dos particiones P y Q del intervalo $[a, b]$, es claro que $P \subset Q$ implica que $\|Q\| \leq \|P\|$, pero el recíproco no se cumple en general (véase el ejercicio más abajo).

Ejercicio 9 (Orden y norma)**.** (1) Construir dos particiones P y Q del intervalo $[0, 1]$ que no sean comparables (es decir: $P \not\subset Q$ y $Q \not\subset P$) y tales que $\|Q\| < \|P\|$.

(2) Dada una partición P de un intervalo $[a, b]$, demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $Q \subset [a, b]$ tal que $P \subset Q$ (es decir: Q es más fina que P) y $\|Q\| < \varepsilon$.

2.3. Sumas inferiores y superiores

En esta sección, se considera una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida sobre un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (con $a < b$). Además, asumiremos que la función f está acotada[8] en el intervalo $[a, b]$, en el sentido de que existen dos números $k_*, k^* \in \mathbb{R}$ tales que

$$k_* \ \leq \ f(x) \ \leq \ k^* \qquad\qquad \text{para todo } x \in [a, b]$$

Notación 10. Dado un subintervalo $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ (con $a \leq a_1 < b_1 \leq b$), se observa que el conjunto $\{f(x) : x \in [a_1, b_1]\} \subset \mathbb{R}$ está acotado inferiormente por k_* y superiormente por k^*. Por el axioma de completitud, este conjunto tiene ínfimo y supremo, que escribiremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{ínf}(f, [a_1, b_1]) \ &= \ \operatorname{ínf}\{f(x) : x \in [a_1, b_1]\} \\ \sup(f, [a_1, b_1]) \ &= \ \sup\{f(x) : x \in [a_1, b_1]\} \end{aligned}$$

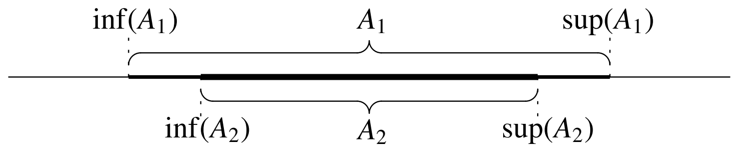
Por construcción, tenemos que: $\quad k_* \ \leq \ \operatorname{ínf}(f, [a_1, b_1]) \ \leq \ \sup(f, [a_1, b_1]) \ \leq \ k^*$.

Lema 11. *Si* $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$*, entonces:*

$$\operatorname{ínf}(f, [a_1, b_1]) \ \leq \ \operatorname{ínf}(f, [a_2, b_2]) \ \leq \ \sup(f, [a_2, b_2]) \ \leq \ \sup(f, [a_1, b_1])\,.$$

Demostración. Sean $A_1 = \{f(x) : x \in [a_1, b_1]\}$ y $A_2 = \{f(x) : x \in [a_2, b_2]\}$. Por construcción, tenemos que $A_2 \subset A_1$, pues $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$:

[8] En lo siguiente, sólo integraremos funciones definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$, y cuyos valores están acotados por dos números k_* y k^* fijados. Ambas condiciones sirven para asegurarnos que la región que nos interesa está incluida en un rectángulo (aquí: el producto cartesiano $[a, b] \times [k_*, k^*]$) y que su área es finita.

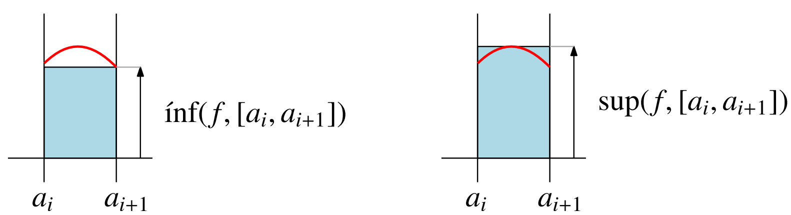


Se trata de demostrar que $\text{ínf}(A_1) \leq \text{ínf}(A_2) \leq \sup(A_2) \leq \sup(A_1)$. Demostremos la primera desigualdad. Por construcción, el número $\text{ínf}(A_1)$ es una cota inferior del conjunto A_1, y como $A_2 \subset A_1$, el mismo número también es una cota inferior del conjunto A_2. Pero como todas las cotas inferiores de A_2 son menores o iguales a $\text{ínf}(A_2)$ (que es la cota inferior más grande de A_2), se deduce que $\text{ínf}(A_1) \leq \text{ínf}(A_2)$. La desigualdad $\sup(A_2) \leq \sup(A_1)$ se demuestra de modo análogo, y la desigualdad central $\text{ínf}(A_2) \leq \sup(A_2)$ es obvia. □

Ahora, consideremos una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ del intervalo $[a, b]$.

En cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ (con $i = 0, \ldots, n-1$), la función f toma valores entre los dos números $\text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])$ y $\sup(f, [a_i, a_{i+1}])$. Así, en dicho subintervalo, se puede aproximar el área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de f por las áreas de los siguientes dos rectángulos:

- un rectángulo de ancho $a_{i+1} - a_i > 0$ y de altura algebraica $\text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \in \mathbb{R}$, cuya área algebraica[9] es $(a_{i+1} - a_i) \cdot \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])$ (aproximación por defecto);
- un rectángulo de ancho $a_{i+1} - a_i > 0$ y de altura algebraica $\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) \in \mathbb{R}$, cuya área algebraica es $(a_{i+1} - a_i) \cdot \sup(f, [a_i, a_{i+1}])$ (aproximación por exceso).



Sumando estas dos familias de números para todo $i = 0, \ldots, n-1$, se obtienen las siguientes dos aproximaciones del área algebraica de la región que nos interesa:

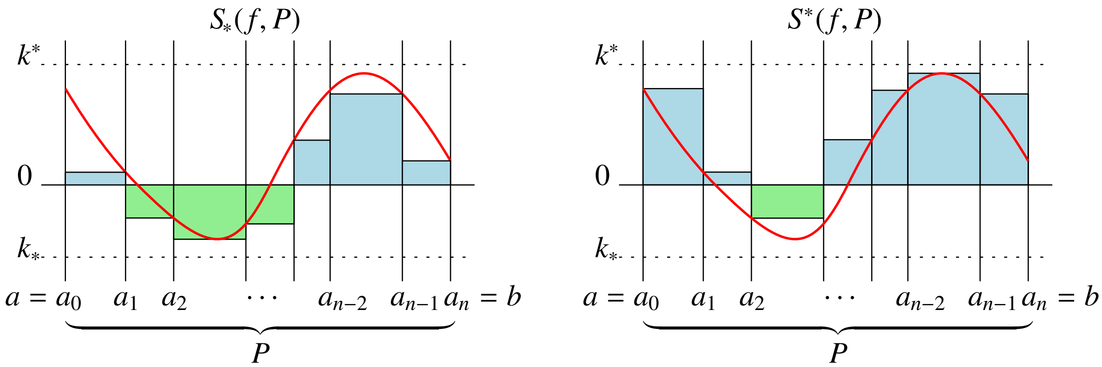
Definición 12 (Suma inferior y suma superior respecto a una partición)**.** Dado una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset [a, b]$, se definen la *suma inferior* $S_*(f, P)$ y la *suma superior* $S^*(f, P)$ de la función f respecto a la partición P por:

$$S_*(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \qquad \text{(suma inferior de } f \text{ respecto a } P\text{)}$$

$$S^*(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup(f, [a_i, a_{i+1}]) \qquad \text{(suma superior de } f \text{ respecto a } P\text{)}$$

Gráficamente, la suma inferior $S_*(f, P)$ y la suma superior $S^*(f, P)$ de la función f respecto a la partición P representan las áreas algebraicas de las regiones poligonales dibujadas en la siguiente figura (a la izquierda para la suma inferior y a la derecha para la suma superior):

[9] Véase nota 5 p. 2.



Intuitivamente, la suma inferior $S_*(f,P)$ constituye una aproximación por defecto del área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f, mientras la suma superior $S^*(f,P)$ constituye una aproximación por exceso de dicha área. Se demuestra que:

Proposición 13. *Para toda partición $P \subset [a,b]$, tenemos que:* $\quad S_*(f,P) \le S^*(f,P)$.

Demostración. Escribamos $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, con $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$. Para cada $i = 0, \ldots, n-1$, se observa que $\text{ínf}(f,[a_i,a_{i+1}]) \le \sup(f,[a_i,a_{i+1}])$. Multiplicando ambos lados de la desigualdad anterior por el número $a_{i+1} - a_i > 0$, se obtiene la desigualdad

$$(a_{i+1} - a_i) \cdot \text{ínf}(f,[a_i,a_{i+1}]) \;\le\; (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup(f,[a_i,a_{i+1}]),$$

y sumándola para todo $i = 0, \ldots, n-1$, se deduce que $S_*(f,P) \le S^*(f,P)$. □

Ejercicio 14. A partir de lo anterior, demostrar que

$$(b-a)k_* \;\le\; S_*(f,P) \;\le\; S^*(f,P) \;\le\; (b-a)k^*$$

para toda partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset [a,b]$.

Ejercicio 15. Sea $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 4x - x^2$.

(1) Bosquejar la gráfica de la función f.

(2) Demostrar que f es monótona creciente en $[0,2]$ y monótona decreciente en $[2,4]$. (Sugerencia: se puede estudiar el signo de la derivada de f, o bien demostrar el resultado directamente, observando que $f(x) = 4 - (x-2)^2$.)

(3) Rellenar la siguiente tabla de valores:

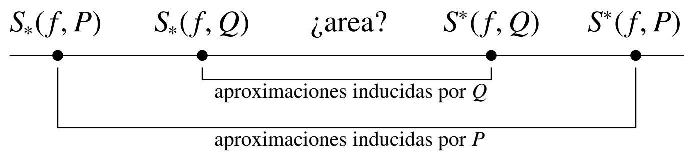
$x =$	$0,0$	$0,5$	$1,0$	$1,5$	$2,0$	$2,5$	$3,0$	$3,5$	$4,0$
$f(x) =$									

(4) Calcular las sumas inferiores $S_*(f,P)$ y las sumas superiores $S^*(f,P)$ para las siguientes particiones del intervalo $[0,4]$, así como las normas de dichas particiones:
- $P_0 = \{0;\ 4\}$
- $P_1 = \{0;\ 2;\ 4\}$
- $P_2 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$
- $P_3 = \{0;\ 0,5;\ 1;\ 1,5;\ 2;\ 2,5;\ 3;\ 3,5;\ 4\}$

Observación: Para determinar los ínfimos y supremos de la función f en los subintervalos definidos por las particiones P_0, P_1, P_2 y P_3, conviene usar las propiedades de monotonía demostradas en (2).

(5) Comparar los pares de aproximaciones $S_*(f,P)$ y $S^*(f,P)$ para $P = P_0, P_1, P_2, P_3$.
¿Cuál es el mejor par de aproximaciones? ¿y el peor?

Más generalmente, se puede demostrar que cuando dos particiones P y Q del intervalo $[a, b]$ son tales que $P \subset Q$ (es decir: Q es más fina que P), las sumas $S_*(f, Q)$ y $S^*(f, Q)$ inducidas por la partición más fina siempre constituyen un mejor par de aproximaciones del área deseada que las sumas $S_*(f, P)$ y $S^*(f, P)$ inducidas por la partición más gruesa:



Formalmente:

Proposición 16. *Si dos particiones $P, Q \subset [a, b]$ son tales que $P \subset Q$, entonces:*

$$S_*(f, P) \;\leq\; S_*(f, Q) \;\leq\; S^*(f, Q) \;\leq\; S^*(f, P)\,.$$

Demostración. En primer lugar, se considera el caso particular donde las particiones P y Q sólo difieren por un punto, es decir: $Q = P \cup \{a'\}$, con $a' \notin P$. En este caso, se pueden escribir

$$P \;=\; \{a_0, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\} \qquad \text{y} \qquad Q \;=\; \{a_0, \ldots, a_k, a', a_{k+1}, \ldots, a_n\}\,,$$

suponiendo que el nuevo punto a' agregado por la partición Q se interpone entre los puntos a_k y a_{k+1} de la partición inicial P (para algún $k = 0, \ldots, n-1$). Así, la suma inferior de la función f respecto a la partición P se puede descomponer del modo siguiente

$$\begin{aligned} S_*(f, P) \;&=\; \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \cdot \mathrm{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \\ &=\; S_{i<k} \;+\; (a_{k+1} - a_k) \cdot \mathrm{ínf}(f, [a_k, a_{k+1}]) \;+\; S_{i>k} \end{aligned}$$

agrupando todos los sumandos correspondientes a los índices $i < k$ en la suma $S_{i<k}$, y todos los sumandos correspondientes a los índices $i > k$ en la suma $S_{i>k}$. Así obtenemos que

$$\begin{aligned} S_*(f, P) \;&=\; S_{i<k} \;+\; (a_{k+1} - a_k) \cdot \mathrm{ínf}(f, [a_k, a_{k+1}]) \;+\; S_{i>k} \\ &=\; S_{i<k} \;+\; ((a' - a_k) + (a_{k+1} - a')) \cdot \mathrm{ínf}(f, [a_k, a_{k+1}]) \;+\; S_{i>k} \\ &=\; S_{i<k} \;+\; (a' - a_k) \cdot \mathrm{ínf}(f, [a_k, a_{k+1}]) \;+\; (a_{k+1} - a') \cdot \mathrm{ínf}(f, [a_k, a_{k+1}]) \;+\; S_{i>k} \\ &\leq\; S_{i<k} \;+\; (a' - a_k) \cdot \mathrm{ínf}(f, [a_k, a']) \;+\; (a_{k+1} - a') \cdot \mathrm{ínf}(f, [a', a_{k+1}]) \;+\; S_{i>k} \\ &=\; S_*(f, P \cup \{a'\}) \;=\; S_*(f, Q) \end{aligned}$$

observando que $\mathrm{ínf}(f, [a_k, a_{k+1}]) \leq \mathrm{ínf}(f, [a_k, a'])$ e $\mathrm{ínf}(f, [a_k, a_{k+1}]) \leq \mathrm{ínf}(f, [a', a_{k+1}])$ por el Lema 11 p. 4. De modo análogo, se demuestra que

$$S^*(f, P) \;\geq\; S^*(f, P \cup \{a'\}) \;=\; S^*(f, Q)\,,$$

usando de nuevo el Lema 11, pero con los supremos. Ahora, consideremos el caso general, donde P y Q son dos particiones tales que $P \subset Q$, pero de tamaños cualesquiera. Como P y Q

son conjuntos finitos tales que $P \subset Q$, se puede escribir $Q = P \cup \{a'_1, \ldots, a'_p\}$ para algún $p \in \mathbb{N}$. Usando de modo repetido el caso particular demostrado anteriormente, obtenemos[10] que

$$\begin{aligned}
& S_*(f,P) \ \le\ S_*(f, P \cup \{a'_1\}) \ \le\ S_*(f, P \cup \{a'_1, a'_2\}) \ \le\ \cdots \\
& \qquad \cdots \ \le\ S_*(f, P \cup \{a'_1, \ldots, a'_{p-1}\}) \ \le\ S_*(f, P \cup \{a'_1, \ldots, a'_p\}) \ =\ S_*(f,Q) \\
\text{y} \quad & S^*(f,P) \ \ge\ S^*(f, P \cup \{a'_1\}) \ \ge\ S^*(f, P \cup \{a'_1, a'_2\}) \ \ge\ \cdots \\
& \qquad \cdots \ \ge\ S^*(f, P \cup \{a'_1, \ldots, a'_{p-1}\}) \ \ge\ S^*(f, P \cup \{a'_1, \ldots, a'_p\}) \ =\ S^*(f,Q)\,,
\end{aligned}$$

lo que acaba demostrar que $S_*(f,P) \ \le\ S_*(f,Q) \ \le\ S^*(f,Q) \ \le\ S^*(f,P)$. □

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que todas las sumas inferiores $S_*(f,P)$ (las "aproximaciones por defecto") son menores o iguales a todas la sumas superiores $S^*(f,Q)$ (las "aproximaciones por exceso"), independientemente de las particiones P y Q:

Proposición 17. *Para todas las particiones $P, Q \subset [a,b]$, tenemos que: $S_*(f,P) \ \le\ S^*(f,Q)$.*

Demostración. Por la proposición anterior, tenemos que

$$S_*(f,P) \ \le\ S_*(f, P \cup Q) \ \le\ S^*(f, P \cup Q) \ \le\ S^*(f,Q)\,. \qquad \square$$

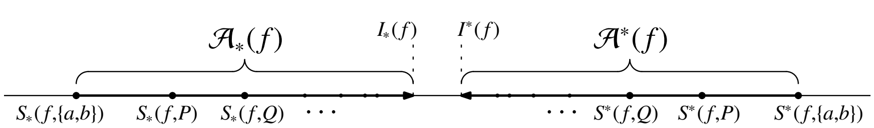
2.4. Integral inferior y superior

Los lectores habrán observado que nunca definimos formalmente lo que es el "área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica", y que tampoco usamos esta noción para demostrar los resultados anteriores. Hasta ahora, la noción de área es una noción puramente intuitiva, sin definición formal, que sólo usamos como un hilo conductor para definir (formalmente) las sumas inferiores y superiores.

Al final, se obtienen dos conjuntos de "aproximaciones":

- el conjunto $\mathcal{A}_*(f) \ =\ \{S_*(f,P) \ :\ P \text{ partición de } [a,b]\}$
  formado por todas las sumas inferiores de la función f, que se pueden considerar como aproximaciones por defecto del área deseada (y todavía no definida);
- el conjunto $\mathcal{A}^*(f) \ =\ \{S^*(f,Q) \ :\ Q \text{ partición de } [a,b]\}$
  formado por todas las sumas superiores de la función f, que se pueden considerar como aproximaciones por exceso del área deseada.

Además, demostramos (Prop. 17) que todos los elementos del conjunto $\mathcal{A}_*(f)$ son menores o iguales a todos los elementos del conjunto $\mathcal{A}^*(f)$:



En particular:

- el conjunto $\mathcal{A}_*(f)$ está acotado superiormente (por cualquier elemento de $\mathcal{A}^*(f)$), y

[10] Formalmente, la demostración del caso general se efectúa por inducción sobre el número p de elementos agregados, usando el caso particular para pasar de p a $p+1$ en el paso inductivo (ejercicio).

- el conjunto $\mathcal{A}^*(f)$ está acotado inferiormente (por cualquier elemento de $\mathcal{A}_*(f)$).

Lo que justifica la siguiente definición:

Definición 18 (Integral inferior y superior)**.** Se llaman *integral inferior* e *integral superior* de la función f a los dos números $I_*(f)$ y $I^*(f)$ definidos por:

$$I_*(f) \;=\; \sup(\mathcal{A}_*(f)) \;=\; \sup_{P\subset[a,b]} S_*(f,P) \qquad \text{(integral inferior de } f\text{)}$$

$$I^*(f) \;=\; \inf(\mathcal{A}^*(f)) \;=\; \inf_{P\subset[a,b]} S^*(f,P) \qquad \text{(integral superior de } f\text{)}$$

Así:

- La integral inferior $I_*(f)$ de la función f es definida como el supremo de todas las sumas inferiores de la función f. Intuitivamente, este número constituye la *mejor aproximación por defecto* del área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de f;
- La integral superior $I^*(f)$ de la función f es definida como el ínfimo de todas las sumas superiores de la función f. Intuitivamente, este número constituye la *mejor aproximación por exceso* de la misma área.

En particular, se verifica fácilmente que:

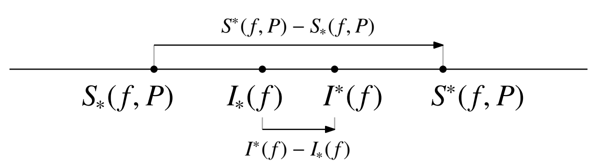
Proposición 19. $I_*(f) \leq I^*(f)$.

Demostración. Se sigue de la Prop. 17 (ejercicio). □

Observación 20. Por definición de las integrales inferior $I_*(f)$ y superior $I^*(f)$, tenemos que $S_*(f,P) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S^*(f,P)$ para toda partición $P \subset [a,b]$, lo que implica que

$$0 \;\leq\; I^*(f) - I_*(f) \;\leq\; S^*(f,P) - S_*(f,P)$$

como se puede observar en la siguiente figura:



Más generalmente, se verifica de mismo modo (usando la Prop. 16) que si P, Q, R, etc. son particiones del intervalo $[a,b]$ tales que $P \subset Q \subset R \subset \cdots$, entonces:

$$0 \;\leq\; I^*(f) - I_*(f) \;\leq\; \cdots \;\leq\; S^*(f,R) - S_*(f,R) \;\leq\; S^*(f,Q) - S_*(f,Q) \;\leq\; S^*(f,P) - S_*(f,P)\,.$$

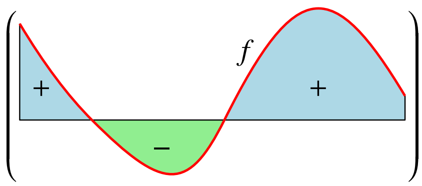
En lo siguiente, veremos que cuando la función f es suficientemente regular (lo que será el caso para la gran mayoría de las funciones que consideraremos en este curso), los dos números $I_*(f)$ e $I^*(f)$ son iguales. En este caso, podremos considerar que el número $I_*(f) = I^*(f)$ constituye una *definición* del área deseada. En los otros casos, consideraremos que la región ubicada entre el eje x y la gráfica de f no tiene área bien definida. Formalmente:

Definición 21 (Función integrable)**.** Se dice que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (acotada) es *integrable* cuando sus integrales inferior y superior coinciden: $I_*(f) = I^*(f)$. Cuando es el caso, este número se llama la *integral de la función* f en el intervalo $[a,b]$, y se escribe

$$\int_a^b f \qquad \text{o bien} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \qquad\qquad (= I_*(f) = I^*(f))$$

Así, por construcción, la integral de la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ representa el área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de f:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \text{área algebraica}$$



(Recordemos que, por definición, sólo las funciones acotadas pueden ser integrables.)

Observación 22. Históricamente, la notación anterior fue introducida en 1686 por Leibniz, que definía la integral de una función f como una "suma continua"[11] de áreas de rectángulos infinitamente finos, de altura $f(x)$ y de ancho infinitesimal dx:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \text{“}\sum_{x\in[a,b]}\text{”} f(x)\cdot dx$$

En particular, el símbolo $\int$ viene de la caligrafía de la letra s[12] en el siglo XVII.

En lo que sigue, usaremos con frecuencia los siguientes dos criterios para demostrar que una función acotada es integrable:

Proposición 23 (Criterio de integración "a menos de ε")**.** *Para toda función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y para todo número $I \in \mathbb{R}$, las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(1) *La función f es integrable en $[a,b]$ y su integral vale I.*
(2) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $P \subset [a,b]$ tal que*

$$I - \varepsilon \;<\; S_*(f,P) \;\leq\; S^*(f,P) \;<\; I + \varepsilon\,.$$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que $I_*(f) = I^*(f) = I$. Dado $\varepsilon > 0$, queremos construir una partición P que cumpla las desigualdades deseadas. Como $I = I_*(f)$ es el supremo de las sumas inferiores de f, existe una partición $P_1 \subset [a,b]$ tal que $I - \varepsilon < S_*(f,P_1) \leq I$. Y como $I = I^*(f)$ es el ínfimo de las sumas superiores de f, existe una partición $P_2 \subset [a,b]$ tal que $I \leq S^*(f,P_2) < I + \varepsilon$. Tomando $P = P_1 \cup P_2$, se deduce de lo anterior (por la Prop. 16) que

$$I - \varepsilon < \; S_*(f,P_1) \;\leq\; S_*(f,P) \;\leq\; S^*(f,P) \;\leq\; S^*(f,P_2) \;<\; I + \varepsilon\,.$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Como ambos números $I_*(f)$ e $I^*(f)$ se intercalan entre las sumas inferior $S_*(f,P)$ y superior $S^*(f,P)$ de la función f para toda partición $P \subset [a,b]$, la condición (2) implica que

$$I - \varepsilon < I_*(f) < I + \varepsilon \qquad \text{e} \qquad I - \varepsilon < I^*(f) < I + \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, tenemos que $I_*(f) = I^*(f) = I$. □

[11] Aunque la definición de Leibniz ya no sea considerada como correcta según los criterios modernos, las intuiciones subyacentes todavía son muy útiles en física y a veces también en matemática.

[12] La s de la palabra latina «summa» (suma), que se escribía «$\int$umma» en el tiempo de Leibniz.

Observación 24. El criterio anterior es un criterio de *integración*, que sirve (1) para determinar si la función considerada es integrable y (2) para determinar el valor de su integral. A veces, sólo se necesita determinar si la función considerada es integrable, sin conocer el valor de su integral. En este caso, se usa el siguiente criterio de *integrabilidad*:

Proposición 25 (Criterio de integrabilidad "a menos de ε")**.** *Para toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(1) *La función f es integrable en el intervalo $[a, b]$.*
(2) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $P \subset [a, b]$ tal que $0 \leq S^*(f, P) - S_*(f, P) < \varepsilon$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que la función f es integrable en $[a, b]$, y llamaremos I a su integral. Dado $\varepsilon > 0$, existe por la proposición anterior una partición $P \subset [a, b]$ tal que

$$I - \varepsilon/2 \ < \ S_*(f, P) \ \leq \ S^*(f, P) \ < \ I + \varepsilon/2 \, .$$

Entonces, tenemos que $0 \leq S^*(f, P) - S_*(f, P) < (I + \varepsilon/2) - (I - \varepsilon/2) = \varepsilon$.
(2) $\Rightarrow$ (1). Como $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S^*(f, P) - S_*(f, P)$ para toda partición $P \subset [a, b]$, la condición (2) implica que $0 \leq I^*(f) - I_*(f) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, $I_*(f) = I^*(f)$. □

2.5. Ejemplos y contraejemplo

Ejemplo 26 (Integración de una función constante)**.** Dados un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$) y un número $k \in \mathbb{R}$, se considera la función constante $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = k \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \, .$$

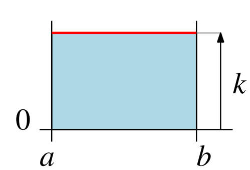
Para demostrar que la función f es integrable, se considera una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ (cualquiera) del intervalo $[a, b]$, y se observa que en cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ ($i = 0, \ldots, n-1$), tenemos que $\text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) = \sup(f, [a_i, a_{i+1}]) = k$. Así, la sumas inferior $S_*(f, P)$ y superior $S^*(f, P)$ de la función f respecto a la partición P son iguales, y:

$$S_*(f, P) \ = \ S^*(f, P) \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot k \ = \ k \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \ \overset{13}{=} \ k(a_n - a_0) \ = \ (b - a)k \, .$$

Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{A}_*(f) = \mathcal{A}^*(f) = \{(b - a)k\}$ (todas las aproximaciones son iguales), de tal modo que $I_*(f) = I^*(f) = (b - a)k$. Así, la función f es integrable en $[a, b]$, y

$$\int_a^b f(x)\, dx \ = \ \int_a^b k\, dx \ = \ (b - a)k \, .$$

Observación 27. Como era de esperar, la integral $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b k\, dx$ de la función constante $f(x) = k$ en el intervalo $[a, b]$ es igual al área algebraica $(b - a) \times k$ de un rectángulo de ancho $b - a > 0$ y de altura algebraica $k \in \mathbb{R}$.



[13] Aquí se observa que $\sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (-a_i + a_{i+1}) = -a_0 + \cancel{a_1} - \cancel{a_1} + \cancel{a_2} - \cdots - \cancel{a_{n-1}} + a_n = a_n - a_0$. En lo siguiente, usaremos frecuentemente esta regla de simplificación "de a dos" de modo implícito.

En la Sección 4 y en resto del curso, veremos otros muchos ejemplos (menos triviales) de funciones integrables cuyas integrales se pueden calcular sencillamente en algunos casos. Sin embargo, también existen funciones no integrables, así como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 28 (Función de Dirichlet)**.** Consideremos la función de Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, que es definida por

$$f(x) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad \text{(para todo } x \in [0,1])$$

Sea una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ cualquiera del intervalo $[0,1]$. Se observa que en cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ (con $i = 0, \ldots, n-1$), existen a la vez números racionales (para los cuales $f(x) = 1$) y números irracionales (para los cuales $f(x) = 0$), de tal modo que

$$\text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) = 0 \qquad \text{mientras} \qquad \sup(f, [a_i, a_{i+1}]) = 1\,.$$

Calculando las sumas inferior y superior correspondientes, se obtiene

$$S_*(f,P) \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot 0 \ = \ 0$$

mientras
$$S^*(f,P) \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot 1 \ = \ a_n - a_0 \ = \ 1\,,$$

y eso para todas las particiones $P \subset [0,1]$. Por lo tanto, tenemos que $I_*(f) = 0$ e $I^*(f) = 1$, lo que demuestra que la función de Dirichlet no es integrable, aunque esté acotada.

Observación 29. Intuitivamente, la función de Dirichlet (que alterna entre los valores 0 y 1 infinitas veces en cada subintervalo de $[0,1]$) es tan irregular que el método de aproximación por rectángulos no logra capturar el área de la región correspondiente[14].

El primer resultado importante de la teoría de la integración es que todas las funciones monótonas (crecientes o decrecientes) son integrables:

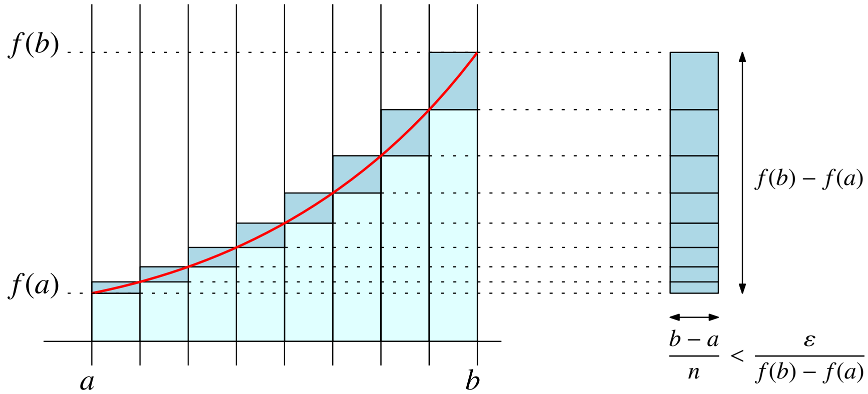
Teorema 30 (Funciones monótonas)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona creciente o decreciente en el intervalo $[a,b]$, entonces f es integrable en dicho intervalo.*

Demostración. Sólo consideraremos el caso donde f es monótona creciente; el caso donde es monótona decreciente es análogo (véase Ejercicio 31 más abajo). Cómo la función f es monótona creciente en el intervalo $[a,b]$, está acotada entre $f(a)$ y $f(b)$. En el caso particular donde $f(a) = f(b)$, la función f es constante, y ya vimos que es integrable (Ejemplo 26). A partir de ahora, se supone que $f(a) < f(b)$. Para demostrar que la función f es integrable, se usa el criterio de integrabilidad a menos de ε (Prop. 25). Dado $\varepsilon > 0$ fijado, se puede hallar un entero $n \geq 1$ suficientemente grande para que $\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ (por el principio de Arquímedes). Luego se considera la partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ del intervalo $[a,b]$ definida por

$$a_i \ = \ a + i \cdot \frac{b-a}{n} \qquad \text{(para todo } i = 0, \ldots, n)$$

de tal modo que todos los subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$ tengan la misma longitud $(b-a)/n$.

[14]Sin embargo, la teoría de la integración de Lebesgue (véase nota 3 p. 1) permite definir y calcular la integral de la función de Dirichlet, que vale 0. (Intuitivamente, este resultado extraño viene de que hay infinitamente más números irracionales en el intervalo $[0,1]$ que números racionales, aunque parezcan uniformemente mezclados).



Ahora, se observa que en cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ ($i = 0, \ldots, n-1$), la función f es monótona creciente, de tal modo que $\text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) = f(a_i)$ mientras $\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) = f(a_{i+1})$. Por lo tanto, tenemos que

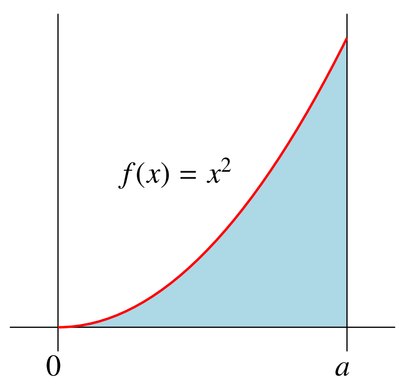
$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ S^*(f,P) - S_*(f,P) &= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(a_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(a_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)(f(a_{i+1})-f(a_i)) = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}(f(a_{i+1})-f(a_i)) \\ &= \frac{b-a}{n}\cdot(f(b)-f(a)) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot(f(b)-f(a)) = \varepsilon \end{aligned}$$

(véase figura anterior). Así para cada $\varepsilon > 0$, demostramos que existe una partición $P \subset [a,b]$ tal que $0 \leq S^*(f,P) - S_*(f,P) < \varepsilon$. Por la Prop. 25, se deduce que la función f es integrable. □

Ejercicio 31. Usando como modelo la demostración del caso donde la función f es monótona creciente, redactar la demostración del caso donde f es monótona decreciente, modificando el razonamiento de modo adecuado.

Observación 32. El resultado anterior expresa que el área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f siempre está bien definida cuando dicha función es monótona (creciente o decreciente). Sin embargo, este resultado no explica como calcular dicha área. En la práctica, el método de integración depende del ejemplo considerado. Aquí hay uno:

Ejemplo 33 (Integración de la función $f(x) = x^2$)**.** Dado un número $a > 0$, queremos integrar la función $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, cuya gráfica es un arco de parábola:



Como la función $f(x) = x^2$ es monótona creciente en el intervalo $[0, a]$, es integrable por el teorema anterior. Para determinar el valor de su integral, necesitaremos el siguiente lema:

Lema 34. *Para todos los números reales x e y tales que* $0 \le x \le y$*, tenemos que*

$$(y - x)x^2 \;\le\; \frac{y^3 - x^3}{3} \;\le\; (y - x)y^2 .$$

Demostración. Se observa que $y^3 - x^3 = (y - x)(x^2 + xy + y^2)$. Además, tenemos que:

$$3x^2 \;=\; x^2 + x^2 + x^2 \;\le\; x^2 + xy + y^2 \;\le\; y^2 + y^2 + y^2 \;=\; 3y^2$$

(pues $0 \le x \le y$). Multiplicando los miembros extremos y el miembro central de las desigualdades anteriores por el número $y - x \ge 0$, se deduce que:

$$3(y - x)x^2 \;\le\; \underbrace{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}_{y^3 - x^3} \;\le\; 3(y - x)y^3 ,$$

lo que implica inmediatamente las desigualdades deseadas. □

Ahora, consideremos una partición cualquiera $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ del intervalo $[0, a]$. En cada uno de los subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$ ($i = 0, \ldots, n - 1$), la función f es monótona creciente, de tal modo que $\text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) = f(a_i) = a_i^2$, mientras $\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) = f(a_{i+1}) = a_{i+1}^2$. Entonces, tenemos que

$$S_*(f, P) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot a_i^2 \;\le\; \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a_{i+1}^3}{3} - \frac{a_i^3}{3} \right) \;=\; \frac{a_n^3}{3} - \frac{a_0^3}{3} \;=\; \frac{a^3}{3}$$

(usando el lema anterior para establecer la desigualdad central), mientras

$$S^*(f, P) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot a_{i+1}^2 \;\ge\; \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a_{i+1}^3}{3} - \frac{a_i^3}{3} \right) \;=\; \frac{a_n^3}{3} - \frac{a_0^3}{3} \;=\; \frac{a^3}{3}$$

(usando de vuelta el lema anterior para la desigualdad central). Así demostramos que

$$S_*(f, P) \;\le\; \frac{a^3}{3} \;\le\; S^*(f, P)$$

para todas las particiones P del intervalo $[a, b]$. Pasando al supremo (en la desigualdad izquierda) y al ínfimo (en la desigualdad derecha), se deduce que:

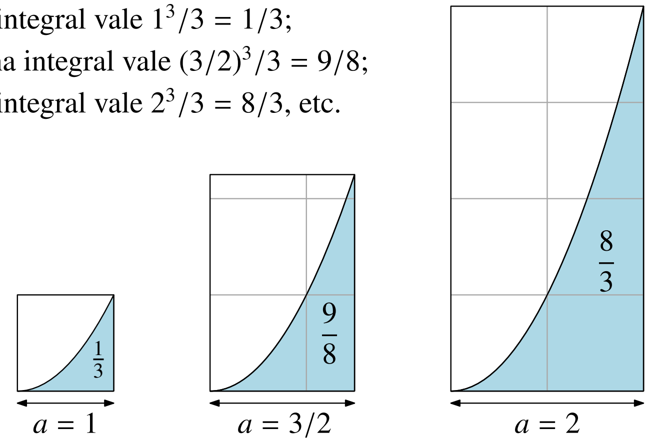
$$I_*(f) \;\le\; \frac{a^3}{3} \;\le\; I^*(f) .$$

Como la función f es integrable, tenemos que $I_*(f) = I^*(f) = a^3/3$. Luego:

$$\int_0^a f(x)\, dx \;=\; \int_0^a x^2\, dx \;=\; \frac{a^3}{3} \cdot$$

En particular:

- cuando $a = 1$, dicha integral vale $1^3/3 = 1/3$;
- cuando $a = 3/2$, dicha integral vale $(3/2)^3/3 = 9/8$;
- cuando $a = 2$, dicha integral vale $2^3/3 = 8/3$, etc.



Ejercicio 35. Modificar el razonamiento del ejemplo anterior para demostrar más generalmente que para todos los números a y b tales que $0 \leq a < b$, tenemos que

$$\int_a^b x^2\,dx \;=\; \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\,.$$

Ejercicio 36 (Integral de la función identidad)**.** En un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$), se considera la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in [a, b]$.

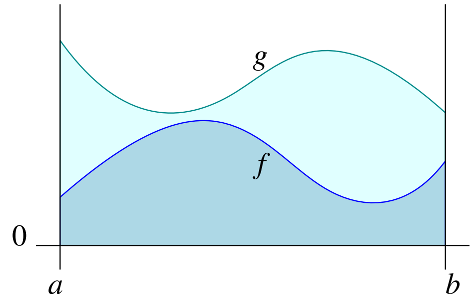
(1) Demostrar que para todos los números $x \leq y$, tenemos que $(y - x)x \leq \frac{y^2-x^2}{2} \leq (y - x)y$. (Sugerencia: usar la identidad notable $y^2 - x^2 = (y - x)(x + y)$.)
(2) Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$. Usando el resultado demostrado en (1), demostrar que $S_*(f, P) \leq \frac{b^2-a^2}{2} \leq S^*(f, P)$.
(Sugerencia: usar la misma técnica que en el ejemplo 33.)
(3) Deducir de lo anterior que $I_*(f) \leq \frac{b^2-a^2}{2} \leq I^*(f)$.
(4) Usando la monotonía de la función f, concluir que f es integrable y $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.
(5) En el caso donde $0 < a < b$, se observa que la región ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f es un trapecio rectángulo. Calcular el área de dicho trapecio, y verificar que el resultado obtenido es consistente con el resultado del ítem (4).

3. Propiedades de la integral

3.1. Monotonía

Una propiedad fundamental de la integral es que respeta el orden entre dos funciones:

Proposición 37 (Monotonía)**.** *Sean dos funciones integrables $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas en un mismo intervalo $[a, b]$ (con $a < b$). Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*



Demostración. Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$. En cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ ($i = 0, \ldots, n-1$), se observa que $\operatorname{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \le f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a_i, a_{i+1}]$, de tal modo que $\operatorname{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \le \operatorname{ínf}(g, [a_i, a_{i+1}])$ (pasando al ínfimo). A partir de la desigualdad anterior, se deduce que

$$S_*(f, P) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \operatorname{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \;\le\; \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \operatorname{ínf}(g, [a_i, a_{i+1}]) \;=\; S_*(g, P)\,,$$

y eso para toda partición $P \subset [a, b]$. Pasando al supremo entre todas las particiones $P \subset [a, b]$, obtenemos que $I_*(f) \le I_*(g)$. Pero como ambas funciones f y g son integrables en el intervalo $[a, b]$, esto quiere decir que

$$\int_a^b f \;=\; I_*(f) \;\le\; I_*(g) \;=\; \int_a^b g\,. \qquad \square$$

Observación 38 (Interpretación geométrica)**.** La desigualdad $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ (que a veces, escribiremos $f \le g$) expresa que la gráfica de la función f se ubica debajo de la gráfica de la función g cuando x recorre el intervalo $[a, b]$. En este caso, es obvio que el área (geométrica) de la región ubicada entre las dos gráficas es dada por la diferencia

$$\text{área de la región ubicada entre } f \text{ y } g \;=\; \int_a^b g - \int_a^b f \qquad (\ge 0)$$

En la Sección 3.2 (linealidad de la integral), veremos que la diferencia entre ambas integrales también es igual a la integral de la diferencia: $\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g - f)$.

Una consecuencia obvia de la proposición anterior es que toda función positiva o nula (resp. negativa o nula) en el intervalo $[a, b]$ tiene integral positiva o nula (resp. negativa o nula):

Corolario 39. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable:*

(1) Si $f(x) \ge 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \ge 0$.

(2) Si $f(x) \le 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \le 0$.

Demostración. Ejercicio. $\square$

Ejercicio 40. Usando la Prop. 37 y el resultado demostrado en el Ejemplo 26 p. 11, demostrar que si una función integrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ está acotada por dos números $k_*, k^* \in \mathbb{R}$ tales que

$$k_* \;\le\; f(x) \;\le\; k^* \qquad (\text{para todo } x \in [a, b])$$

entonces:
$$(b - a)k_* \;\le\; \int_a^b f \;\le\; (b - a)k^*\,.$$

Se interpretará geométricamente el resultado.

3.2. Linealidad

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 41 (Linealidad)**.** *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables. Entonces:*

(1) *La función $f + g$ es integrable en $[a, b]$; además:* $\int_a^b (f + g) \;=\; \int_a^b f + \int_a^b g$.

(2) *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, la función αf es integrable en $[a, b]$; además:* $\int_a^b (\alpha f) \;=\; \alpha \cdot \int_a^b f$

Observaciones 42 (Vínculo con el álgebra lineal)**.** Desde el punto de vista del álgebra lineal[15], el teorema anterior expresa que:

(a) el conjunto de todas las funciones integrables es un *subespacio vectorial* del espacio vectorial[16] formado por todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$;

(b) la operación $f \mapsto \int_a^b f$ (que a cada función integrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ asocia su integral) es una *transformación lineal* del espacio de las funciones integrables hasta $\mathbb{R}$.

Más precisamente, se observa que el conjunto de las funciones integrables en el intervalo $[a, b]$ es un subespacio vectorial del espacio de las funciones *acotadas* de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, que es a su vez un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones (no necesariamente acotadas) de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$, como indicado en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{cc}
\boxed{\text{espacio vectorial de las funciones de } [a,b] \text{ en } \mathbb{R}} & \\
\cup_{\text{(sev)}} & \\
\boxed{\text{subespacio de las funciones acotadas de } [a,b] \text{ en } \mathbb{R}} & \\
\cup_{\text{(sev)}} & \\
\boxed{\text{subespacio de las funciones integrables de } [a,b] \text{ en } \mathbb{R}} & \xrightarrow{\int_a^b (_)} \mathbb{R}
\end{array}$$

(Se puede demostrar que los tres espacios son de dimensión infinita.)

Como la demostración del Teorema 41 (linealidad de la integral) al algo larga, vamos a dividirla en múltiples resultados intermedios.

Lema 43. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas cualesquiera. Entonces, para todo subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$, tenemos que:*

(1) $\operatorname{inf}(f + g, [a', b']) \;\geq\; \operatorname{inf}(f, [a', b']) + \operatorname{inf}(g, [a', b'])$

(2) $\sup(f + g, [a', b']) \;\leq\; \sup(f, [a', b']) + \sup(g, [a', b'])$

Demostración. (1) Tenemos que $\operatorname{inf}(f, [a', b']) \leq f(x)$ e $\operatorname{inf}(g, [a', b']) \leq g(x)$ para todo $x \in [a', b']$, de tal modo que

$$\operatorname{inf}(f, [a', b']) + \operatorname{inf}(g, [a', b']) \;\leq\; f(x) + g(x) \qquad \text{(para todo } x \in [a', b'])$$

Así, el número $\operatorname{inf}(f, [a', b']) + \operatorname{inf}(g, [a', b'])$ es una cota inferior de la función $f + g$ en el subintervalo $[a', b']$. Por lo tanto: $\operatorname{inf}(f, [a', b']) + \operatorname{inf}(g, [a', b']) \leq \operatorname{inf}(f + g, [a', b'])$, pues $\operatorname{inf}(f + g, [a', b'])$ es la cota inferior más grande de la función $f + g$ en el subintervalo $[a', b']$.

(2) Análogo al ítem (1), remplazando los ínfimos por supremos. □

[15] Véase el curso *Geometría y Álgebra Lineal 1* (GAL1).

[16] Recordemos que el conjunto de las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es un ($\mathbb{R}$-)espacio vectorial, cuya suma es la suma de funciones, y cuyo producto por escalares es el producto αf de una función f por un número $\alpha \in \mathbb{R}$. (Ejercicio: verificar que esta suma y que este producto por escalares cumplen los axiomas de los espacios vectoriales.)

Ejercicio 44. Usando como modelo la demostración del ítem (1) del lema anterior, redactar la demostración del ítem (2), modificando el razonamiento de modo adecuado.

La siguiente proposición establece el ítem (1) del teorema:

Proposición 45 (Aditividad)**.** *Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son dos funciones integrables, entonces la función $f + g$ también es integrable en $[a, b]$; además:* $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Demostración. La demostración se efectúa en tres etapas.

Etapa 1: Demostración de la desigualdad $I_*(f + g) \geq I_*(f) + I_*(g)$.
Dada una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset [a, b]$ cualquiera, se observa (por el Lema 43) que:

$$\begin{aligned} S_*(f + g, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \text{ínf}(f + g, [a_i, a_{i+1}]) \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) + \text{ínf}(f + g, [a_i, a_{i+1}])) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) + \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \text{ínf}(g, [a_i, a_{i+1}]) \\ &= S_*(f, P) + S_*(g, P) \end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$(*) \qquad S_*(f, P) + S_*(g, P) \leq S_*(f + g, P) \leq I_*(f + g) \qquad \text{(para toda partición } P\text{)}$$

Ahora, queremos demostrar que $I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f + g)$. Para ello, se fija $\varepsilon > 0$.

- Como el número $I_*(f)$ es el supremo de todas las sumas inferiores $S_*(f, P)$, existe una partición P_1 del intervalo $[a, b]$ tal que $I_*(f) - \varepsilon/2 < S_*(f, P_1) \leq I_*(f)$.
- Y como el número $I_*(g)$ es el supremo de todas las sumas inferiores $S_*(g, P)$, existe otra partición P_2 del intervalo $[a, b]$ tal que $I_*(g) - \varepsilon/2 < S_*(g, P_2) \leq I_*(g)$.

Tomando la partición $P = P_1 \cup P_2$, se observa (usando la Prop. 16) que

$$S_*(f, P) \geq S_*(f, P_1) \geq I_*(f) - \varepsilon/2 \qquad \text{y} \qquad S_*(g, P) \geq S_*(g, P_2) \geq I_*(g) - \varepsilon/2\,,$$

y combinando ambas desigualdades anteriores con $(*)$, se deduce que:

$$I_*(f + g) \geq S_*(f, P) + S_*(g, P) > (I_*(f) - \varepsilon/2) + (I_*(g) - \varepsilon/2) = I_*(f) + I_*(g) - \varepsilon$$

Así demostramos que $I_*(f) + I_*(g) < I_*(f + g) + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ (desigualdad "a menos de ε"), lo que implica la desigualdad $I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f + g)$ deseada.

Etapa 2: Demostración de la desigualdad $I^*(f + g) \leq I^*(f) + I^*(g)$.
Análoga a la demostración de la Etapa 1, remplazando los ínfimos por supremos.

Etapa 3: Conclusión.
Como las funciones f y g son integrables en el intervalo $[a, b]$, tenemos que $I_*(f) = I^*(f)$ e $I_*(g) = I^*(g)$. Usando las desigualdades obtenidas en las etapas 1 y 2, se deduce que

$$I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f + g) \leq I^*(f + g) \leq I^*(f) + I^*(g) = I_*(f) + I_*(g)\,.$$

Por lo tanto, tenemos que $I_*(f+g) = I^*(f+g) = I_*(f)+I_*(g) = I^*(f)+I^*(g)$, lo que demuestra que la función $f + g$ es integrable en el intervalo $[a, b]$, y que $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. □

Ejercicio 46. Usando como modelo la demostración de la etapa 1 de la proposición anterior, redactar la demostración de la etapa 2, modificando el razonamiento de modo adecuado.

Ahora, nos queda demostrar el ítem (2) del teorema. Para ello, se necesita distinguir los casos donde $\alpha \geq 0$ y $\alpha \leq 0$. En primer lugar, se trata el caso donde $\alpha \geq 0$.

Lema 47. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces, para todo subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$ y para todo número $\alpha \geq 0$, tenemos que:*

$$\begin{array}{ll} (1) & \text{ínf}(\alpha f, [a', b']) \ = \ \alpha \cdot \text{ínf}(f, [a', b']) \\ (2) & \sup(\alpha f, [a', b']) \ = \ \alpha \cdot \sup(f, [a', b']) \end{array}$$

Demostración. (1) En primer lugar, se observa que la propiedad es obvia cuando $\alpha = 0$, pues

$$\text{ínf}(0 f, [a', b']) \ = \ 0 \ = \ 0 \cdot \text{ínf}(f, [a', b'])\,.$$

Ahora, se supone que $\alpha > 0$. Para todo $x \in [a', b']$, tenemos que $\text{ínf}(f, [a', b']) \leq f(x)$. Multiplicando la desigualdad anterior por $\alpha > 0$, se obtiene que

$$\alpha \cdot \text{ínf}(f, [a', b']) \ \leq \ \alpha f(x) \qquad\qquad (\text{para todo } x \in [a', b'])$$

y pasando al ínfimo, se deduce que

$$\alpha \cdot \text{ínf}(f, [a', b']) \ \leq \ \text{ínf}(\alpha f, [a', b'])\,.$$

Pero el mismo razonamiento también se aplica a la función αf (en lugar de f) y al factor $\alpha^{-1} > 0$ (en lugar de α), lo que nos da:

$$\alpha^{-1} \cdot \text{ínf}(\alpha f, [a', b']) \ \ \leq \ \ \text{ínf}(\alpha^{-1}(\alpha f), [a', b'])\,,$$

es decir:
$$\text{ínf}(\alpha f, [a', b']) \ \ \leq \ \ \alpha \cdot \text{ínf}(f, [a', b'])\,,$$

(multiplicando ambos lados por $\alpha > 0$, y observando que $\alpha^{-1}(\alpha f) = 1 \cdot f = f$). Por lo tanto:

$$\text{ínf}(\alpha f, [a', b']) \ = \ \alpha \cdot \text{ínf}(f, [a', b'])\,.$$

(2) Análogo al ítem (1), remplazando los ínfimos por supremos. □

Ejercicio 48. Usando como modelo la demostración del ítem (1) del lema anterior, redactar la demostración del ítem (2), modificando el razonamiento de modo adecuado.

Proposición 49. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces para todo número $\alpha \geq 0$, la función αf es integrable en el intervalo $[a, b]$; además: $\int_a^b (\alpha f) = \alpha \cdot \int_a^b f$.*

Demostración. Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$. Por el lema anterior, se observa que:

$$\begin{aligned} S_*(\alpha f, P) \ &= \ \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \text{ínf}(\alpha f, [a_i, a_{i+1}]) \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\alpha \cdot \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])) \\ &= \ \alpha \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \ = \ \alpha\, S_*(f, P) \end{aligned}$$

y de modo análogo, se demuestra que $S^*(\alpha f, P) = \alpha\, S^*(f, P)$. Pasando al supremo (para las sumas inferiores) y al ínfimo (para las sumas superiores), se deduce que $I_*(\alpha f) = \alpha\, I_*(f)$ e $I^*(\alpha f) = \alpha\, I^*(f)$. Como f es integrable, tenemos que $I_*(f) = I^*(f)$, de tal modo que

$$I_*(\alpha f) \;=\; \alpha\, I_*(f) \;=\; \alpha\, I^*(f) \;=\; I^*(\alpha f)\,.$$

Por lo tanto, la función αf es integrable, y se cumple que $\int_a^b (\alpha f) = \alpha \cdot \int_a^b f$. □

Ahora, nos queda demostrar el ítem (2) del teorema en el caso donde $\alpha \leq 0$. Para ello, se necesita relacionar las integrales de la función f y de la función opuesta $-f$.

Lema 50. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces para todo subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$, tenemos que:*

(1) $\inf(-f, [a', b']) \;=\; -\sup(f, [a', b'])$
(2) $\sup(-f, [a', b']) \;=\; -\inf(f, [a', b'])$

Demostración. Ejercicio. □

Proposición 51. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $[a, b]$, entonces la función $-f$ es integrable en $[a, b]$ también; además: $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$.*

Demostración. Usando el lema anterior, se verifica sin dificultad que $S_*(-f, P) = -S^*(f, P)$ y $S^*(-f, P) = -S_*(f, P)$ para toda partición P del intervalo $[a, b]$. Pasando al supremo (para la sumas inferiores) y al ínfimo (para las sumas superiores), se deduce que $I_*(-f) = -I^*(f)$ e $I^*(-f) = -I_*(f)$. Como la función f es integrable en $[a, b]$, tenemos que $I_*(f) = I^*(f)$, de tal modo que

$$I_*(-f, P) \;=\; -\,I^*(f) \;=\; -\,I_*(f) \;=\; I^*(-f, P)\,.$$

Por lo tanto, la función $-f$ es integrable en $[a, b]$, y se cumple que $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$. □

Ahora se puede concluir que:

Proposición 52 (Homogeneidad)**.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces para todo número $\alpha \in \mathbb{R}$, la función αf también lo es; además $\int_a^b (\alpha f) = \alpha \cdot \int_a^b f$.*

Demostración. Ya demostramos la propiedad en el caso donde $\alpha \geq 0$ (Prop. 49), y la demostración en el caso $\alpha \leq 0$ se sigue directamente de las Prop. 49 y 51 (ejercicio). □

Esto acaba la demostración del teorema.

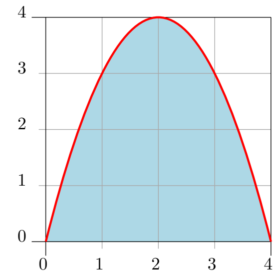
Más en general, se demuestra que:

Corolario 53 (Combinaciones lineales)**.** *Si $f_1, \ldots, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones integrables, entonces para todos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, la función $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ (combinación lineal de las funciones $f_1, \ldots, f_n$) también lo es. Además, su integral es dada por:*

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n) \;=\; \alpha_1 \cdot \int_a^b f_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \int_a^b f_n\,.$$

Demostración. Ejercicio. □

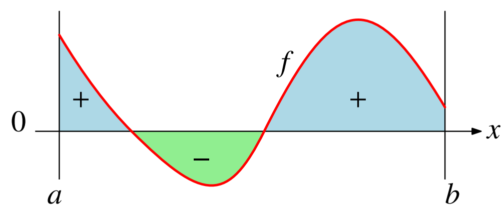
Ejercicio 54. Se considera la función $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ del Ejercicio 15 p. 6, la cual está definida por $f(x) = 4x - x^2$ para todo $x \in [0,4]$.



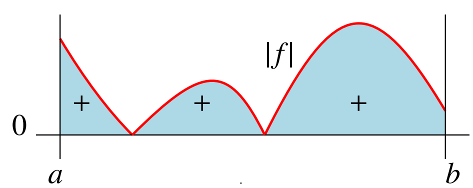
(1) Escribir la función f como una combinación lineal de las funciones $f_1(x) = x$ (Ejercicio 36 p. 15) y $f_2(x) = x^2$ (Ejemplo 33 p. 13).
(2) Usando la linealidad de la integral así como los resultados demostrados en el Ejemplo 33 p. 13 y en el Ejercicio 36 p. 15, calcular la integral $\int_0^4 f(x)\,dx$.
(3) Comparar el resultado con las aproximaciones construidas en el Ejercicio 15 p. 6.

3.3. Integral y valor absoluto

Por construcción, la integral $\int_a^b f$ de una función integrable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ representa el área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f, contando las áreas arriba del eje x con un signo positivo y las áreas abajo del eje x con un signo negativo:



Para calcular el *área geométrica* de la misma región (contando esta vez todas las áreas con un signo positivo), una solución sencilla consiste en remplazar la función f por su valor absoluto $|f|$, es decir: por la función definida por $|f|(x) = |f(x)|$ para todo $x \in [a,b]$.



En efecto, es claro que las regiones inducidas por las gráficas de la función f y de su valor absoluto $|f|$ tienen misma área geométrica (por un argumento obvio de simetría, véase figura anterior). Por otro lado, como la función $|f|$ es positiva o nula, el área geométrica de la región inducida por su gráfica coincide con el área algebraica de la misma región, la cual se puede calcular con la integral $\int_a^b |f(x)|\,dx$. Dicho de otro modo, tenemos que:

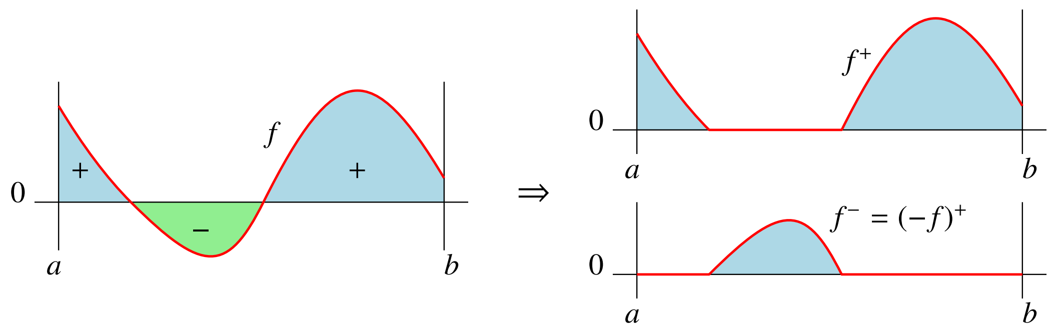
$$\begin{aligned} & \text{área geométrica inducida por } f \\ = \; & \text{área geométrica/algebraica inducida por } |f| \; = \; \int_a^b |f(x)|\,dx \end{aligned}$$

Aunque el argumento anterior sea bastante intuitivo, plantea un problema formal que es el siguiente: dado que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable, ¿se puede deducir que su valor absoluto $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ también es integrable? Para resolver este problema, se necesita introducir la descomposición de una función en sus partes positiva y negativa:

Definición 55 (Partes positiva y negativa de una función)**.** Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se llama *parte positiva* de la función f a la función $f^+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f^+(x) \;=\; \text{máx}(0, f(x)) \;=\; \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Se llama *parte negativa* de la función f a la función $f^- : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f^- = (-f)^+$ (es decir: como la parte positiva de la función opuesta $-f$).



Observación 56. Por construcción, ambas funciones f^+ y f^- son positivas o nulas, y permiten descomponer las funciones f y $|f|$ del modo siguiente:

$$f \;=\; f^+ - f^- \qquad \text{y} \qquad |f| \;=\; f^+ + f^- \,.$$

(Ejercicio: demostrar ambas igualdades.)

Lema 57. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces, la parte positiva f^+ de la función f también está acotada, y para todo subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$, tenemos que:*

$$\sup(f^+, [a', b']) - \text{ínf}(f^+, [a', b']) \;\leq\; \sup(f, [a', b']) - \text{ínf}(f, [a', b'])$$

Demostración. Es claro que la función f^+ está acotada inferiormente por 0, y superiormente por el máximo de los dos números 0 y $\sup(f, [a, b])$. Ahora, se distinguen los siguientes tres casos, en función de la posición de la gráfica de f respecto al eje x en el subintervalo $[a', b']$:

- Caso donde $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a', b']$. En este caso, se observa que $f^+(x) = f(x)$ para todo $x \in [a', b']$. Por lo tanto, tenemos que:
$$\sup(f^+, [a', b']) - \text{ínf}(f^+, [a', b']) \;=\; \sup(f, [a', b']) - \text{ínf}(f, [a', b'])\,.$$
- Caso donde $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a', b']$. En este caso, se observa que $f^+(x) = 0$ para todo $x \in [a', b']$. Por lo tanto, tenemos que
$$\sup(f^+, [a', b']) - \text{ínf}(f^+, [a', b']) \;=\; 0 - 0 \;\leq\; \sup(f, [a', b']) - \text{ínf}(f, [a', b'])\,.$$
- Caso donde existen $x^+, x^- \in [a', b']$ tales que $f(x^+) > 0$ y $f(x^-) < 0$. En este caso, se observa que:

- $\sup(f^+, [a', b']) = \sup(f, [a', b']) > 0$ (ejercicio)
- $\text{ínf}(f^+, [a', b']) = 0$ (ya que $f^+ \geq 0$ y $f^+(x^-) = 0$)
- $\text{ínf}(f, [a', b']) < 0$ (ya que $f(x^-) < 0$)

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\sup(f^+, [a', b']) - \text{ínf}(f^+, [a', b']) &= \sup(f, [a', b']) - 0 \\ &< \sup(f, [a', b']) - \text{ínf}(f, [a', b']) . \qquad \square\end{aligned}$$

Proposición 58. *Si una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a < b$) es integrable, entonces sus partes positiva y negativa $f^+, f^- : [a, b] \to \mathbb{R}$ también son integrables en $[a, b]$.*

Demostración. Para demostrar que la función $f^+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable, se usa el criterio de integrabilidad a menos de ε (Prop. 25). Dado $\varepsilon > 0$, como f es integrable en $[a, b]$, existe (por la Prop. 25) una partición $P \subset [a, b]$ tal que $0 \leq S^*(f, P) - S_*(f, P) < \varepsilon$. Escribiendo $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, se observa (por el lema anterior) que:

$$\begin{aligned}0 \leq S^*(f^+, P) - S_*(f^+, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\sup(f^+, [a_i, a_{i+1}]) - \text{ínf}(f^+, [a_i, a_{i+1}])) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) - \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])) \\ &= S^*(f, P) - S_*(f, P) < \varepsilon\end{aligned}$$

Luego se concluye por la Prop. 25 que la función f^+ es integrable en $[a, b]$. Para demostrar que f^- es integrable en $[a, b]$ también, basta con observar que $f^- = (-f)^+$. $\square$

Ahora se puede demostrar la propiedad que relaciona las integrales de una función (integrable) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y de su valor absoluto $|f|$:

Proposición 59 (Valor absoluto)**.** *Si una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces la función $x \mapsto |f(x)|$ (valor absoluto de f) también es integrable en el intervalo $[a, b]$, y*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx .$$

Demostración. Por la proposición anterior, sabemos que ambas funciones $f^+, f^- : [a, b] \to \mathbb{R}$ son integrables, lo que implica que la función $|f| = f^+ + f^-$ también es integrable. Además, como $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$ (con $f^+, f^- \geq 0$), obtenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f\right| &= \left|\int_a^b (f^+ - f^-)\right| = \left|\int_a^b f^+ - \int_a^b f^-\right| \\ &\leq \left|\int_a^b f^+\right| + \left|\int_a^b f^-\right| = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b (f^+ + f^-) = \int_a^b |f| . \qquad \square\end{aligned}$$

Observación 60. Intuitivamente, la proposición anterior expresa que el área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f siempre es menor o igual al área geométrica de la misma región en valor absoluto.

Ejercicio 61 (Máximo y mínimo de dos funciones)**.** Dadas dos funciones $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a < b$), se consideran las funciones $h_1, h_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$h_1(x) = \text{mín}(f(x), g(x)) \qquad \text{y} \qquad h_2(x) = \text{máx}(f(x), g(x)) \qquad (x \in [a, b])$$

(1) Demostrar que $h_1 = f - (f - g)^+$ y $h_2 = f + (g - f)^+$.

(2) Deducir que si f y g son integrables, entonces las funciones h_1 y h_2 también lo son.

3.4. Aditividad respecto al intervalo

Por construcción, la noción de integral sólo tiene sentido en un intervalo cerrado $[a, b]$, con $a < b$. Sin embargo, cuando se trabaja con una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo I cualquiera de $\mathbb{R}$, siempre se puede restringir el estudio a un subintervalo cerrado $[a, b] \subset I$ para determinar si la función f es integrable en dicho subintervalo y, llegado el caso, calcular el valor de la integral $\int_a^b f$. Por supuesto, la propiedad de integrabilidad depende del subintervalo considerado, y una misma función $f : I \to \mathbb{R}$ puede ser integrable en algunos subintervalos de I y no ser integrable en otros subintervalos.

Ejercicio 62. A partir de los ejemplos anteriores, construir una función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ que sea integrable en el intervalo $[0, 1]$ y no integrable en el intervalo $[1, 2]$.

Sin embargo, se puede demostrar que toda función integrable en un intervalo $[a, b]$ también es integrable en cualquier subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$:

Proposición 63 (Restricción del intervalo de integración)**.** *Si una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable en el intervalo $[a, b]$ (con $a < b$), entonces también es integrable en cualquier subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$ (con $a \le a' < b' \le b$).*

Demostración. Sea $f_1 = f_{\upharpoonright[a',b']}$ la restricción[17] de la función $f : I \to \mathbb{R}$ al subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$. Dado que la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable, queremos demostrar que la función $f_1 : [a', b'] \to \mathbb{R}$ también es integrable. Para ello, se usa el criterio de integrabilidad a menos de ε (Prop. 25), y se fija $\varepsilon > 0$. Como la función f es integrable en el intervalo $[a, b]$, existe (por la Prop. 25) una partición $P \subset [a, b]$ tal que $0 \le S^*(f, P) - S_*(f, P) < \varepsilon$. Ahora, se considera la partición $Q \subset [a, b]$ definida por $Q = P \cup \{a', b'\}$ $(\subset [a, b])$. Por construcción, la partición Q es más fina que P, de tal modo que

$$0 \;\le\; S^*(f, Q) - S_*(f, Q) \;\le\; S^*(f, P) - S_*(f, P) \;<\; \varepsilon$$

(por la Prop. 16). Escribamos $Q = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, con $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$. Como $a', b' \in Q$ (por construcción), tenemos que $a' = a_p$ y $b' = a_q$ para algunos índices $p < q$ entre 0 y n. Escribiendo $Q' = Q \cap [a', b'] = \{a_p, a_{p+1}, \dots, a_q\}$, se observa que el subconjunto $Q' \subset Q$ es una partición del subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$. Respecto a dicha partición, tenemos que[18]:

$$\begin{aligned} 0 \;\le\; S^*(f_1, Q') - S_*(f_1, Q') \;&=\; \sum_{i=p}^{q-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) - \inf(f, [a_i, a_{i+1}])) \\ &\le\; \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) - \inf(f, [a_i, a_{i+1}])) \\ &=\; S^*(f, Q) - S_*(f, Q) \;<\; \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Se concluye por la Prop. 25 que la función $f_1 = f_{\upharpoonright[a',b']}$ es integrable. □

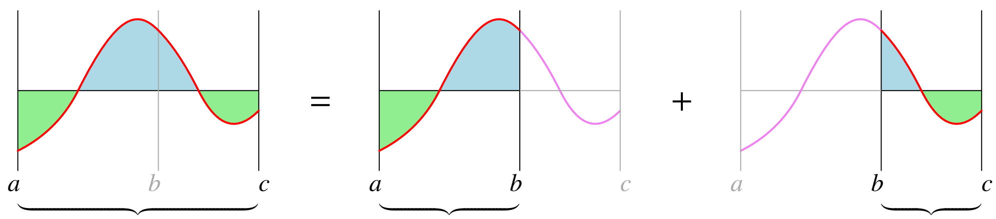
[17]Formalmente, la *restricción* de la función f al subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$ es la función $f_{\upharpoonright[a',b']}$ definida por $\mathrm{dom}(f_{\upharpoonright[a',b']}) = [a', b']$, $\mathrm{cod}(f_{\upharpoonright[a',b']}) = \mathbb{R}$ y $f_{\upharpoonright[a',b']}(x) = f(x)$ para todo $x \in [a', b']$.

[18]La desigualdad $\sum_{i=p}^{q-1} \cdots \le \sum_{i=0}^{n-1} \cdots$ viene de que todos los sumandos de ambas sumatorias son positivos o nulos, y de que la segunda sumatoria contiene todos los sumandos de la primera.

Observación 64 (Funciones localmente integrables)**.** En lo siguiente, diremos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ (definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ cualquiera) es *localmente integrable* cuando es integrable en todos los subintervalos $[a, b] \subset I$ (con $a < b$). Por la proposición anterior, es claro que cuando el intervalo de definición ya es de la forma $I = [a, b]$ (con $a < b$), una función $f : I \to \mathbb{R}$ es localmente integrable en $I = [a, b]$ si y sólo si es integrable[19] en $[a, b]$.

Proposición 65 (Aditividad respecto al intervalo)**.** *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y tres puntos $a, b, c \in I$ tales que $a < b < c$. Si la función f es integrable en ambos intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$, entonces es integrable en el intervalo $[a, c] = [a, b] \cup [b, c]$ también, y se cumple que*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f .$$



Demostración. Sean $f_1 = f_{\restriction[a,b]}$, $f_2 = f_{\restriction[b,c]}$ y $f_3 = f_{\restriction[a,c]}$ las restricciones de la función f a los tres intervalos $[a, b]$, $[b, c]$ y $[a, c] = [a, b] \cup [b, c]$. Por hipótesis, las funciones $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $f_2 : [b, c] \to \mathbb{R}$ son integrables, lo que nos permite escribir $I_1 = \int_a^b f_1 = \int_a^b f$ e $I_2 = \int_b^c f_2 = \int_b^c f$. Queremos demostrar que la función $f_3 : [a, c] \to \mathbb{R}$ es integrable y que su integral vale $I_1 + I_2$. Para ello, se usa el criterio de integración a menos de ε (Prop. 23), y se fija un número $\varepsilon > 0$.

- Como la función f_1 es integrable en el intervalo $[a, b]$, existe (por la Prop. 23) una partición $P_1 \subset [a, b]$ tal que $\quad I_1 - \varepsilon/2 < S_*(f_1, P_1) \le S^*(f_1, P_1) < I_1 + \varepsilon/2 \quad (1)$
- Y como la función f_2 es integrable en el intervalo $[b, c]$, existe (por la Prop. 23) una partición $P_2 \subset [b, c]$ tal que $\quad I_2 - \varepsilon/2 < S_*(f_2, P_2) \le S^*(f_2, P_2) < I_2 + \varepsilon/2 \quad (2)$

Sea $P_3 = P_1 \cup P_2$. Por construcción, el conjunto (finito) P_3 constituye una partición del intervalo $[a, c] = [a, b] \cup [b, c]$, obtenida "pegando" ambas particiones $P_1 \subset [a, b]$ y $P_2 \subset [b, c]$ en su punto común $b \in P_1 \cap P_2$. Se verifica sin dificultad (ejercicio) que

$$S_*(f_3, P_3) = S_*(f_1, P_1) + S_*(f_2, P_2) \qquad \text{y} \qquad S^*(f_3, P_3) = S^*(f_1, P_1) + S^*(f_2, P_2) .$$

Sumando las desigualdades (1) y (2), se deduce que:

$$I_1 + I_2 - \varepsilon < \underbrace{S_*(f_1, P_1) + S_*(f_2, P_2)}_{S_*(f_3, P_3)} \le \underbrace{S^*(f_1, P_1) + S^*(f_2, P_2)}_{S^*(f_3, P_3)} < I_1 + I_2 + \varepsilon .$$

Así demostramos que para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $P_3 \subset [a, b]$ tal que $I_1 + I_2 - \varepsilon < I_*(f, P_3) \le I^*(f, P_3) < I_1 + I_2 + \varepsilon$. Por la Prop. 23, la función $f_3 = f_{\restriction[a,c]}$ es integrable en en intervalo $[a, c]$ y su integral vale $I_1 + I_2 = \int_a^b f + \int_b^c f$. □

[19] Así, la noción de *función localmente integrable* sólo tiene interés cuando la función considerada es definida en un intervalo que no es de la forma $[a, b]$, con $a < b$.

3.5. Extensión de la notación $\int_a^b f$ a los casos donde $a = b$ y $a > b$

Hasta ahora, sólo definimos la notación $\int_a^b f$ en el caso donde $a < b$. En la práctica, es muy cómodo extender la notación anterior a los casos donde $a = b$ y $a > b$, escribiendo

$$\int_a^b f \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ -\displaystyle\int_b^a f & \text{si } a > b \end{cases}$$

cuando los lados derechos están bien definidos.

Gracias a esta extensión de la notación $\int_a^b f$, se puede generalizar la propiedad de aditividad respecto al intervalo (Prop. 65) del modo siguiente:

Proposición 66 (Aditividad generalizada respecto al intervalo)**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces para todos $a, b, c \in I$, tenemos que*

$$\int_a^c f \;=\; \int_a^b f + \int_b^c f$$

(independientemente de las posiciones relativas de los tres puntos $a, b, c \in I$).

Demostración. Se distinguen los siguientes 5 casos:

(1) Caso donde $a = b = c$. En este caso, ambos números $\int_a^c f$ y $\int_a^b f + \int_b^c f$ son nulos por definición, y la igualdad deseada se cumple trivialmente.

(2) Caso donde $a = b \neq c$. En este caso, tenemos que

$$\int_a^c f \;=\; \underbrace{\int_a^a f}_{0} + \int_a^c f \;=\; \int_a^b f + \int_b^c f \qquad \text{(pues } a = b\text{)}$$

(3) Caso donde $a \neq b = c$. En este caso, tenemos que

$$\int_a^c f \;=\; \int_a^c f + \underbrace{\int_c^c f}_{0} \;=\; \int_a^b f + \int_b^c f \qquad \text{(pues } c = b\text{)}$$

(4) Caso donde $a = c \neq b$. En este caso, tenemos que

$$\int_a^c f \underset{\text{Def.}}{=} 0 \underset{\text{Def.}}{=} \int_c^b f + \int_b^c f \;=\; \int_a^b f + \int_b^c f \qquad \text{(pues } c = a\text{)}$$

(5) Caso donde a, b y c son distintos dos a dos. En este caso, se distinguen los siguientes 6 subcasos, según las posiciones relativas de los tres números $a, b, c \in I$:

(5.1) Subcaso donde $a < b < c$. Obvio por la Prop. 65.

(5.2) Subcaso donde $a < c < b$. En este subcaso, tenemos que:

$$\int_a^c f \underset{\text{Prop. 65}}{=} \int_a^b f - \int_c^b f \underset{\text{Def.}}{=} \int_a^b f + \int_b^c f\,.$$

(5.3) Subcaso donde $b < a < c$. En este subcaso, tenemos que:

$$\int_a^c f \underset{\text{Prop. 65}}{=} \int_b^c f - \int_b^a f \underset{\text{Def.}}{=} \int_a^b f + \int_b^c f\,.$$

(5.4) Subcaso donde $b < c < a$. En este subcaso, tenemos que:

$$\int_a^c f \underset{\text{Def.}}{=} -\int_c^a f \underset{\text{Prop. 65}}{=} -\left(\int_b^a f - \int_b^c f\right) \;=\; -\int_b^a f + \int_b^c f \underset{\text{Def.}}{=} \int_a^b f + \int_b^c f\,.$$

(5.5) Subcaso donde $c < a < b$. En este subcaso, tenemos que:

$$\int_a^c f \underset{\text{Def.}}{=} -\int_c^a f \underset{\text{Prop. 65}}{=} -\left(\int_c^b f - \int_a^b f\right) = -\int_c^b f + \int_a^b f \underset{\text{Def.}}{=} \int_a^b f + \int_b^c f\,.$$

(5.6) Subcaso donde $c < b < a$. En este subcaso, tenemos que:

$$\int_a^c f \underset{\text{Def.}}{=} -\int_c^a f \underset{\text{Prop. 65}}{=} -\left(\int_c^b f + \int_b^a f\right) = -\int_c^b f - \int_b^a f \underset{\text{Def.}}{=} \int_a^b f + \int_b^c f\,.$$

Lo que acaba demostrar la propiedad deseada. □

Observaciones 67. De mismo modo se extiende la propiedad de linealidad (Teorema 41 p. 17) a los casos donde $a = b$ y $a > b$ (ejercicio). Por otro lado, la propiedad de monotonía (Prop. 37 p. 15) y la propiedad del valor absoluto (Prop. 59 p. 23) sólo se cumplen en el caso donde $a \leq b$, y no se extienden al caso donde $a > b$. Se encontrará en el Cuadro 1 más abajo un resumen de las propiedades algebraicas de la integral extendida.

Monotonía	Si $f \leq g$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ Si $f \geq 0$, entonces $\int_a^b f \geq 0$ Si $f \leq 0$, entonces $\int_a^b f \leq 0$	(sólo si $a \leq b$)
Valor absoluto	$\left\lvert \int_a^b f \right\rvert \leq \int_a^b \lvert f\rvert$	(sólo si $a \leq b$)
Linealidad	$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ $\int_a^b (\alpha f) = \alpha \cdot \int_a^b f$ $\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n) = \alpha_1 \cdot \int_a^b f_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \int_a^b f_n$	(a, b cualesquiera)
Aditividad con respecto al intervalo	$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ $\int_b^a f = -\int_a^b f$ $\int_a^a f = 0$	(a, b, c cualesquiera)

(Suponiendo que las funciones consideradas son integrables en los correspondientes intervalos)

Cuadro 1: Propiedades algebraicas de la integral (extendida)

Ejercicio 68. Verificar que la Prop. 37 p. 15 (monotonía) y la Prop. 59 p. 23 (valor absoluto) se extienden trivialmente al caso donde $a = b$, y explicar por qué no se extienden al caso donde $a > b$ mediante contraejemplos adecuados.

3.6. Otras propiedades geométricas de la integral

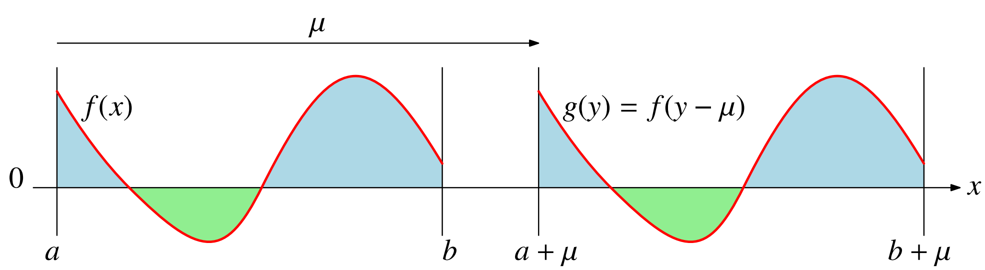
En esta sección, se presentan algunas propiedades geométricas notables de la integral, en forma de ejercicios para el lector.

3.6.1. Invariancia por traslación

Ejercicio 69. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $[a, b]$, con $a < b$. Dado un número $\mu \in \mathbb{R}$, se considera la función $g : [a + \mu, b + \mu] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) \;=\; f(y - \mu) \qquad\qquad \text{(para todo } y \in [a + \mu, b + \mu])$$

Por construcción, g es la función cuya gráfica se deduce de la gráfica de la función f por la traslación horizontal según el número μ:



El objetivo del ejercicio es demostrar que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si g es integrable en $[a + \mu, b + \mu]$, y que cuando es el caso, las correspondientes integrales son iguales:

$$\int_{a+\mu}^{b+\mu} g(y)\,dy \;=\; \int_{a+\mu}^{b+\mu} f(y - \mu)\,dy \;=\; \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

(1) Dados un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ y un número $k \in \mathbb{R}$, se escribe $S + k := \{x + k : x \in S\}$.
  a) Demostrar que si P es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces $P + \mu$ es una partición del intervalo $[a + \mu, b + \mu]$. De mismo modo, demostrar que si Q es una partición de $[a + \mu, b + \mu]$, entonces $Q - \mu$ es una partición de $[a, b]$.
  b) Demostrar que las funciones $P \mapsto P + \mu$ y $Q \mapsto Q - \mu$ definen biyecciones inversas entre el conjunto de las particiones del intervalo $[a, b]$ y el conjunto de las particiones del intervalo $[a + \mu, b + \mu]$.

(3) Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Demostrar que

$$\begin{aligned} \text{ínf}(g, [a_i + \mu, a_{i+1} + \mu]) \;&=\; \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \\ \sup(g, [a_i + \mu, a_{i+1} + \mu]) \;&=\; \sup(f, [a_i, a_{i+1}]) \end{aligned} \qquad \text{(para todo } i = 0, \ldots, n - 1)$$

Deducir que $\quad S_*(g, P + \mu) = S_*(f, P) \quad$ y $\quad S^*(g, P + \mu) = S^*(f, P)$.

(4) Deducir de lo anterior que $\quad I_*(g) = I_*(f) \quad$ e $\quad I^*(g) = I^*(f)$.

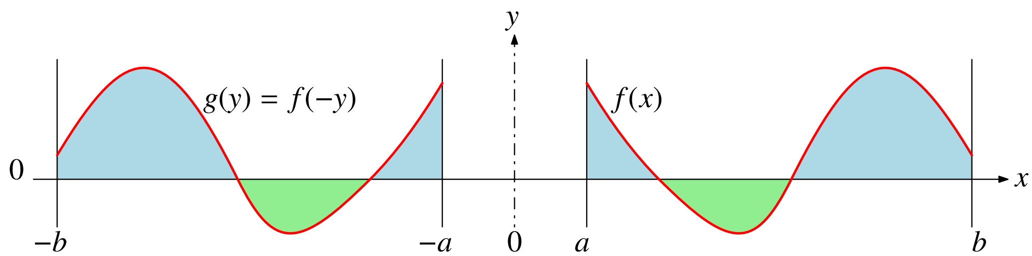
(5) Concluir que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si g es integrable en $[a + \mu, b + \mu]$, y que cuando es el caso, las integrales son iguales.

3.6.2. Integración en espejo

Ejercicio 70. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $[a, b]$, con $a < b$. Se considera la función $g : [-b, -a] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) \;=\; f(-y) \qquad\qquad \text{(para todo } y \in [-b, -a])$$

Por construcción, g es la función cuya gráfica se deduce de la gráfica de la función f por la simetría axial respecto al eje y:



El objetivo del ejercicio es demostrar que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si g es integrable en $[-b, -a]$, y que cuando es el caso, las correspondientes integrales son iguales:

$$\int_{-b}^{-a} g(y)\,dy \;=\; \int_{-b}^{-a} f(-y)\,dy \;=\; \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

(1) Dado un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$, se escribe $-S := \{-x : x \in S\}$.

  a) Demostrar que si P es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces $-P$ es una partición del intervalo $[-b, -a]$, y viceversa.

  b) Deducir que la función $P \mapsto -P$ define una biyección entre el conjunto de las particiones del intervalo $[a, b]$ y el conjunto de las del intervalo $[-b, -a]$.

(3) Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Demostrar que

$$\begin{aligned} \text{ínf}(g, [-a_{i+1}, -a_i]) &= \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \\ \sup(g, [-a_{i+1}, -a_i]) &= \sup(f, [a_i, a_{i+1}]) \end{aligned} \qquad \text{(para todo } i = 0, \ldots, n-1)$$

Deducir que $\quad S_*(g, -P) = S_*(f, P) \quad$ y $\quad S^*(g, -P) = S^*(f, P)$.

(4) Deducir de lo anterior que $\quad I_*(g) = I_*(f) \quad$ e $\quad I^*(g) = I^*(f)$.

(5) Concluir que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si g es integrable en $[-b, -a]$, y que cuando es el caso, las integrales son iguales.

Observación 71. Intercambiando los extremos del intervalo de integración de la función $g(y) = f(-y)$ (y usando la notación extendida definida en la Sección 3.5), se deduce que:

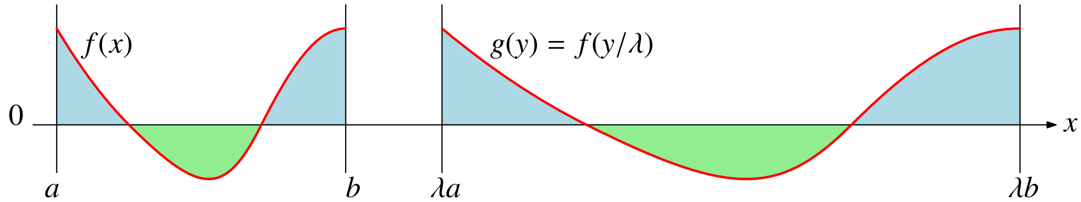
$$\int_{-a}^{-b} f(-y)\,dy \;=\; -\int_{-b}^{-a} f(-y)\,dy \;=\; -\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

3.6.3. Integración y dilatación

Ejercicio 72. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $[a, b]$, con $a < b$. Dado un número $\lambda > 0$, se considera la función $g : [\lambda a, \lambda b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) \;=\; f(y/\lambda) \qquad\qquad \text{(para todo } y \in [\lambda a, \lambda b])$$

Por construcción, g es la función cuya gráfica se deduce de la gráfica de la función f por la "dilatación" horizontal de factor $\lambda > 0$, como indicado en la siguiente figura, que muestra un ejemplo de dilatación para $\lambda = 2$:



El objetivo del ejercicio es demostrar que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si g es integrable en $[\lambda a, \lambda b]$, y que cuando es el caso, las correspondientes integrales son relacionadas por:

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(y)\,dy \;=\; \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(y/\lambda)\,dy \;=\; \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

(1) Dados un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ y un número $k > 0$, se escribe $k\,S := \{kx : x \in S\}$.

a) Demostrar que si P es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces λP es una partición del intervalo $[\lambda a, \lambda b]$. De mismo modo, demostrar que si Q es una partición de $[\lambda a, \lambda b]$, entonces $\frac{1}{\lambda}Q$ es una partición de $[a, b]$.

b) Demostrar que las funciones $P \mapsto \lambda P$ y $Q \mapsto \frac{1}{\lambda}Q$ definen biyecciones inversas entre el conjunto de las particiones del intervalo $[a, b]$ y el conjunto de las particiones del intervalo $[\lambda a, \lambda b]$.

(3) Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Demostrar que

$$\begin{aligned} \inf(g, [\lambda a_i, \lambda a_{i+1}]) &= \inf(f, [a_i, a_{i+1}]) \\ \sup(g, [\lambda a_i, \lambda a_{i+1}]) &= \sup(f, [a_i, a_{i+1}]) \end{aligned} \qquad \text{(para todo } i = 0, \ldots, n-1)$$

Deducir que $S_*(g, \lambda P) = \lambda\, S_*(f, P)$ y $S^*(g, \lambda P) = \lambda\, S^*(f, P)$.

(4) Deducir de lo anterior que $I_*(g) = \lambda\, I_*(f)$ e $I^*(g) = \lambda\, I^*(f)$.

(5) Concluir que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si g es integrable en $[\lambda a, \lambda b]$, y que cuando es el caso, tenemos que $\int_{\lambda a}^{\lambda b} g \;=\; \lambda \cdot \int_a^b f$.

Ejercicio 73. Combinando los resultados obtenidos en los Ejercicios 69, 70 y 72, demostrar que si f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces para todos los números $\lambda \neq 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$, la función $y \mapsto f((y - \mu)/\lambda)$ es integrable en el intervalo $[\lambda a + \mu, \lambda b + \mu]$[20] y

$$\int_{\lambda a+\mu}^{\lambda b+\mu} f((y-\mu)/\lambda)\,dy \;=\; \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

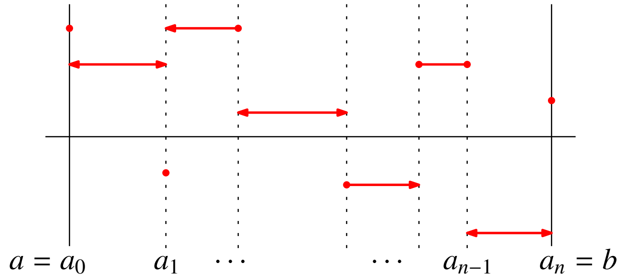
(Sugerencia: distinguir los casos donde $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$.)

4. Ejemplos de funciones integrables

4.1. Funciones escalonadas

Definición 74 (Función escalonada)**.** Se dice que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a < b$) es *escalonada* cuando existe una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que la función f es constante en cada uno de los subintervalos abiertos (a_i, a_{i+1}) ($i = 0, \ldots, n-1$).

[20] De hecho: el intervalo $[\lambda a + \mu, \lambda b + \mu]$ si $\lambda > 0$, o el intervalo $[\lambda b + \mu, \lambda a + \mu]$ si $\lambda < 0$.



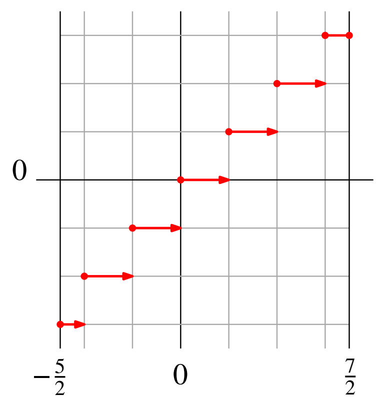
Observación 75. Precisemos que una función escalonada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sólo necesita ser constante en los subintervalos *abiertos* (a_i, a_{i+1}) inducidos par la partición P, la cual define los "escalones" de dicha función. Por otro lado, la función f puede tomar valores cualesquiera en los puntos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de la partición P, como se puede observar en la figura anterior.

Ejercicio 76. Demostrar que toda función escalonada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ está acotada.

Ejemplo 77 (Parte entera)**.** Se recuerda que la *parte entera* de un número real x está definida como el número entero más grande que es menor o igual a x. La parte entera del número x se escribe $\lfloor x \rfloor$, y por construcción, tenemos que

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \qquad \text{y} \qquad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad\qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}\,.$$

(En particular, tenemos que $\lfloor x \rfloor = x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$.) Al estar definida en todo $\mathbb{R}$, la función $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ no puede ser calificada como escalonada, pero es claro que su restricción a cualquier intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (con $a < b$) define una función escalonada en dicho intervalo. Por ejemplo, la siguiente figura representa la función $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ restringida al intervalo $[-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$



y en este caso, la partición que define los escalones es $P = \{-\frac{5}{2}, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \frac{7}{2}\}$.

En la práctica, la función parte entera $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ permite construir múltiples ejemplos de funciones escalonadas, así como lo ilustra el siguiente ejercicio.

Ejercicio 78. Se consideran las funciones $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 : [0, 4] \to \mathbb{R}$ definidas por:

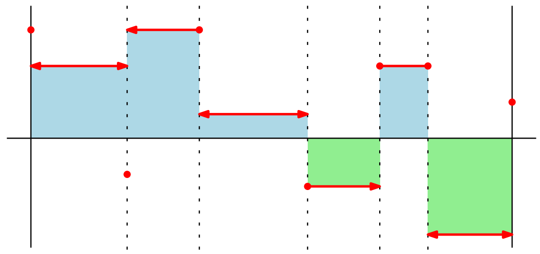
$$\begin{array}{lll} f_1(x) = \lfloor x^2 \rfloor & f_3(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor & f_5(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 \\ f_2(x) = \lfloor x \rfloor^2 & f_4(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor} & f_6(x) = \sqrt{\lfloor x^2 \rfloor} \end{array} \qquad (x \in [0, 4])$$

Para cada una de las funciones $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$, demostrar que dicha función es escalonada (explicitando la partición que define sus escalones), y bosquejar su gráfica.

Proposición 79 (Integral de una función escalonada)**.** *Toda función escalonada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable, y su integral en $[a, b]$ está dada por*

$$\int_a^b f \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) k_i \,,$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son los puntos de la partición de $[a, b]$ que define los escalones de f, y donde $k_0, \ldots, k_{n-1}$ son los valores tomados por f en los subintervalos $(a_0, a_1), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$.



Conceptualmente, la demostración de la proposición anterior es sencilla: consiste en calcular la integral de la función f en cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ ($i = 0, \ldots, n-1$), y en pegar los resultados obtenidos usando la propiedad de aditividad respecto al intervalo (Prop. 65). La única dificultad viene del comportamiento de la función f en los puntos $a_0, a_1, \ldots, a_n$, donde puede tomar valores cualesquiera (que al final no contribuyen al resultado).

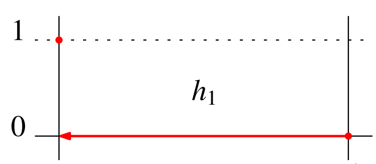
Así empezaremos por tratar esta dificultad:

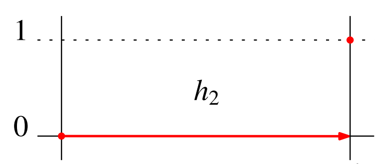
Lema 80. *Si una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es constante en el intervalo abierto (a, b) y vale k en dicho intervalo (aunque pueda tomar valores cualesquiera en los extremos a y b), entonces f es integrable en el intervalo $[a, b]$ y su integral está dada por*

$$\int_a^b f \ = \ (b - a) k \,.$$

Demostración. Sea $f_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$ la función (realmente) constante definida por $f_0(x) = k$ para todo $x \in [a, b]$. Ya sabemos por el Ejemplo 26 p. 11 que la función f_0 es integrable en el intervalo $[a, b]$ y que su integral está dada por $\int_a^b f_0 = (b - a)k$. Ahora se consideran las dos funciones $h_1, h_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$h_1(x) \ = \ \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases} \qquad \text{y} \qquad h_2(x) \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 & \text{si } x = b \end{cases} \qquad (x \in [a, b])$$





Demostremos que la función h_1 es integrable en $[a, b]$ y que su integral vale 0. Para ello, se fija $\varepsilon > 0$, y se considera la partición $P \subset [a, b]$ definida por $P = \{a, a', b\}$, donde a' es un punto del intervalo (a, b) tal que $a' - a < \varepsilon$. Se verifica por un cálculo sencillo (ejercicio) que

$$S_*(h_1, P) = 0 \qquad \text{mientras} \qquad S^*(h_1, P) = (a' - a) \cdot 1 < \varepsilon \,.$$

Así demostramos que para todo $\varepsilon > 0$, existe una partición $P \subset [a, b]$ tal que $0 \leq S_*(h_1, P) \leq S^*(h_1, P) < \varepsilon$. Por la Prop. 23, esto implica que la función h_1 es integrable en $[a, b]$ y que su integral es nula. De modo análogo se demuestra que la función h_2 es integrable en $[a, b]$ y que su integral es nula. Para concluir, basta con observar que la función "casi constante" $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se puede escribir como la siguiente combinación lineal

$$f \;=\; f_0 \;+\; (f(a) - k)\, h_1 \;+\; (f(b) - k)\, h_2$$

de las tres funciones integrables f_0, h_1 y h_2 (ejercicio). Por lo tanto, la función f es integrable en el intervalo $[a, b]$, y su integral está dada por

$$\int_a^b f \;=\; \int_a^b f_0 \;+\; (f(a) - k) \cdot \underbrace{\int_a^b h_1}_{0} \;+\; (f(b) - k) \cdot \underbrace{\int_a^b h_2}_{0} \;=\; \int_a^b f_0 \;=\; (b - a)k\,. \qquad \square$$

Ahora podemos demostrar la proposición anterior:

Demostración de la Prop. 79. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función escalonada cuyos escalones son definidos por una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset [a, b]$, y que toma los valores $k_0, \ldots, k_{n-1}$ en los intervalos abiertos $(a_0, a_1), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$. Por el lema anterior, sabemos que la función f es integrable en cada uno de los intervalos $[a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, con $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f = (a_{i+1} - a_i)k_i$. Por la Prop. 65, se deduce que la función f es integrable en $[a, b]$, y

$$\int_a^b f \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)k_i\,. \qquad \square$$

Ejercicio 81. Calcular la integral $\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} \lfloor x \rfloor\, dx$ (véase Ejemplo 77) así como las integrales de las funciones $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 : [0, 4] \to \mathbb{R}$ definidas en el Ejercicio 78 (en el intervalo $[0, 4]$).

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que siempre se pueden cambiar los valores tomados por una función integrable en un número finito de puntos de su intervalo de definición sin cambiar su integral ni siquiera su carácter integrable:

Proposición 82. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a < b$) dos funciones tales que:*

(1) f es integrable en $[a, b]$;

(2) $g = f$ en $[a, b]$, salvo en un número finito de puntos de $[a, b]$.

Entonces la función g es integrable en el intervalo $[a, b]$, y tiene misma integral que f.

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_n$ los puntos de $[a, b]$ donde ambas funciones f y g difieren. Se observa que la función $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $s(x) = g(x) - f(x)$ para todo $x \in [a, b]$ es una función escalonada cuyos escalones son definidos por la partición $P = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{a, b\}$, y que toma el valor 0 en cada uno de los subintervalos abiertos inducidos por la partición P. Por la Prop. 79, la función escalonada s es integrable en el intervalo $[a, b]$ y su integral vale 0. Por lo tanto, la función $g = f + s$ es integrable en el intervalo $[a, b]$, y

$$\int_a^b g \;=\; \int_a^b (f + s) \;=\; \int_a^b f + \underbrace{\int_a^b s}_{0} \;=\; \int_a^b f\,. \qquad \square$$

Ejercicio 83. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (con $a < b$) una función acotada. El objetivo de este ejercicio es demostrar que sus integrales inferior $I_*(f)$ y superior $I^*(f)$ (véase Sección 2.4) se pueden caracterizar por

$$\begin{aligned} I_*(f) &= \sup\Big\{\int_a^b s \ : \ s : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ escalonada y } \ s \le f\Big\} \\ I^*(f) &= \inf\Big\{\int_a^b t \ : \ t : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ escalonada y } \ t \ge f\Big\} \end{aligned}$$

(1) Demostrar que existen funciones escalonadas $s_0, t_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $s_0 \le f \le t_0$.
(2) Sea $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada[21] tal que $s \le f$ en $[a,b]$.
  (a) Demostrar que $S_*(s,P) \le S_*(f,P)$ para toda partición $P \subset [a,b]$.
  (b) Deducir que $I_*(s) \le I_*(f)$.
(3) Deducir de (2) que $\sup\Big\{\int_a^b s \ : \ s \text{ escalonada y } s \le f\Big\} \ \le \ I_*(f)$.
(4) Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$. Definir a partir de la partición P una función escalonada $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $s \le f$ y $\int_a^b s = S_*(f,P)$.
  (¡Cuidado con la definición de la función s en los puntos $a_0, a_1, \ldots, a_n$!)
(5) Deducir de (4) que $\sup\Big\{\int_a^b s \ : \ s \text{ escalonada y } s \le f\Big\} \ \ge \ I_*(f)$.
  Sugerencia: se podrá demostrar (usando (4)) que para todo $\varepsilon > 0$, existe una función escalonada $s \le f$ tal que $\int_a^b s > I_*(f) - \varepsilon$.
(6) Deducir de lo anterior que $\sup\Big\{\int_a^b s \ : \ s \text{ escalonada y } s \le f\Big\} = I_*(f)$.
(7) De modo análogo, demostrar que $\inf\Big\{\int_a^b t \ : \ t \text{ escalonada y } t \ge f\Big\} = I^*(f)$.
  Sugerencia: se podrá usar como modelo el razonamiento efectuado en los ítems (2)–(6), adaptándolo de modo adecuado.
(8) Deducir de lo anterior que si la función f es integrable en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f \ = \ \sup\Big\{\int_a^b s \ : \ s \text{ escalonada y } s \le f\Big\} \ = \ \inf\Big\{\int_a^b t \ : \ t \text{ escalonada y } t \ge f\Big\}.$$

4.2. Integración de las funciones polinomiales

El objetivo de esta sección es demostrar que todas la funciones polinomiales son localmente integrables, y presentar el método que permite calcular su integral en cualquier intervalo $[a,b]$. Para ello, se comienza por estudiar el caso particular de la función

$$x \mapsto x^p \qquad \text{(con } p \in \mathbb{N}\text{)}$$

Proposición 84 (Integral de la función $x \mapsto x^p$)**.** *Para todo $p \in \mathbb{N}$, la función $x \mapsto x^p$ es integrable en cualquier intervalo $[a,b]$ (con $a < b$) y*

$$\int_a^b x^p \, dx \ = \ \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} \, .$$

La demostración se basa en el siguiente lema:

[21] En este ítem, no se necesita suponer que s es una función escalonada.

Lema 85. *Para todos los números $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq x \leq y$, tenemos que*

$$(y-x)x^p \ \leq \ \frac{y^{p+1}-x^{p+1}}{p+1} \ \leq \ (y-x)y^p\,.$$

Demostración. En primer lugar, se demuestra por inducción sobre $p \in \mathbb{N}$ que

$$(y-x)\sum_{i=0}^{p} x^i y^{p-i} \ \Big(= \ (y-x)(y^p + xy^{p-1} + \cdots + x^{p-1}y + x^p)\Big) \ = \ y^{p+1} - x^{p+1} \qquad (*)$$

- Caso de base. En el caso donde $p = 0$, tenemos que

$$(y-x)\sum_{i=0}^{0} x^i y^{0-i} \ = \ (y-x)x^0y^0 \ = \ (y-x)\cdot 1 \ = \ y^{0+1} - x^{0+1}\,.$$

- Paso de inducción. Supongamos que la propiedad deseada se cumple para algún $p \in \mathbb{N}$ (hipótesis de inducción: HI). Queremos demostrar que la misma propiedad también se cumple para $p+1$. Para ello, basta con observar que

$$\begin{aligned}(y-x)\sum_{i=0}^{p+1} x^i y^{p+1-i} \ &= \ (y-x)\left(y\cdot\sum_{i=0}^{p} x^i y^{p-i} \ + \ x^{p+1}\right)\\ &= \ y\left((y-x)\sum_{i=0}^{p} x^i y^{p-i}\right) \ + \ (y-x)x^{p+1}\\ &= \ y(y^{p+1}-x^{p+1}) \ + \ (y-x)x^{p+1} \qquad \text{(por HI)}\\ &= \ y^{p+2} - yx^{p+1} + yx^{p+1} - x^{p+2} \ = \ y^{p+2} - x^{p+2}\end{aligned}$$

(lo que acaba la demostración de la igualdad deseada). Ahora, se observa que

$$\sum_{i=0}^{p} x^i y^{p-i} \ \geq \ \sum_{i=0}^{p} x^i x^{p-i} \ = \ (p+1)x^p \qquad (\text{pues } x^i \geq 0 \text{ e } y^{p-i} \geq x^{p-i})$$

mientras

$$\sum_{i=0}^{p} x^i y^{p-i} \ \leq \ \sum_{i=0}^{p} y^i y^{p-i} \ = \ (p+1)y^p \qquad (\text{pues } x^i \leq y^i \text{ e } y^{p-i} \geq 0)$$

Multiplicando ambas desigualdades anteriores por $(y-x)/(p+1) \geq 0$, se deduce que

$$\frac{y-x}{\cancel{p+1}}\cdot(\cancel{p+1})x^p \ \leq \ \underbrace{\frac{y-x}{p+1}\sum_{i=0}^{p} x^i y^{p-i}}_{\frac{y^{p+1}-x^{p+1}}{p+1}\ \text{por }(*)} \ \leq \ \frac{y-x}{\cancel{p+1}}\cdot(\cancel{p+1})y^p\,. \qquad \square$$

Demostración de la Prop. 84. Queremos demostrar que la función $f(x) = x^p$ ($p \in \mathbb{N}$) es integrable en cualquier intervalo $[a,b]$, con $a < b$. Para ello, distinguiremos tres casos, según la posición relativa del intervalo $[a,b]$ respecto a 0.

(1) Caso donde $[a,b] \subset [0,+\infty)$, es decir: $0 \leq a < b$. En este caso, la función f es monótona creciente en el intervalo $[a,b]$ (pues es monótona creciente en $[0,+\infty)$), entonces es integrable en $[a,b]$ por el Teorema 30 p. 12. Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$. En cada uno de los subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$ ($i = 0, \ldots, n-1$),

tenemos que $\text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) = f(a_i) = a_i^p$ y $\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) = f(a_{i+1}) = a_{i+1}^p$, por la monotonía de f. Aplicando el Lema 85 a cada par de números (a_i, a_{i+1}), obtenemos que

$$S_*(f,P) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\cdot a_i^p \;\le\; \sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_{i+1}^{p+1}-a_i^{p+1}}{p+1} \;=\; \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

mientras $$S^*(f,P) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\cdot a_{i+1}^p \;\ge\; \sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_{i+1}^{p+1}-a_i^{p+1}}{p+1} \;=\; \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

(usando la simplificación "de a dos" $\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}^{p+1}-a_i^{p+1}) = a_n^{p+1}-a_0^{p+1} = b^{p+1}-a^{p+1}$, véase Nota 13 p. 11). Así demostramos que

$$S_*(f,P) \;\le\; \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1} \;\le\; S^*(f,P)$$

para todas las particiones P del intervalo $[a,b]$. Pasando al supremo (en la desigualdad izquierda) y al ínfimo (en la desigualdad derecha), se deduce que:

$$I_*(f) \;\le\; \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1} \;\le\; I^*(f)\,.$$

Pero como la función $f(x) = x^p$ es integrable en el intervalo $[a,b]$, se concluye que

$$\int_a^b x^p\,dx \;=\; I_*(f) \;=\; I^*(f) \;=\; \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}\,\cdot$$

(2) Caso donde $[a,b] \subset (-\infty, 0]$, es decir: $a < b \le 0$. En este caso, ya sabemos por el caso (1) que la función $f(x) = x^p$ es integrable en el intervalo $[-b,-a] \subset [0,+\infty)$. Usando la propiedad de integración en espejo (Ejercicio 70 p. 29), se deduce que la función $g(x) = f(-x) = (-x)^p$ es integrable en $[a,b]$, y

$$\int_a^b (-x)^p\,dx \;=\; \int_{-b}^{-a} x^p\,dx \;=\; \frac{(-a)^{p+1}-(-b)^{p+1}}{p+1} \qquad \text{(por (1))}$$

Ahora, se distinguen dos subcasos, según si el entero $p \in \mathbb{N}$ es par o impar.

(2.1) Subcaso donde p es par. En este subcaso, tenemos que $(-x)^p = x^p$; luego

$$\int_a^b x^p\,dx \;=\; \int_a^b (-x)^p\,dx \;=\; \frac{(-a)^{p+1}-(-b)^{p+1}}{p+1} \;=\; \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

(pues $(-a)^{p+1} = -a^{p+1}$ y $(-b)^{p+1} = -b^{p+1}$, ya que el entero $p+1$ es impar).

(2.2) Subcaso donde p es impar. En este subcaso, tenemos que $(-x)^p = -x^p$; luego

$$\int_a^b x^p\,dx \;=\; -\int_a^b (-x)^p\,dx \;=\; -\,\frac{(-a)^{p+1}-(-b)^{p+1}}{p+1} \;=\; \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

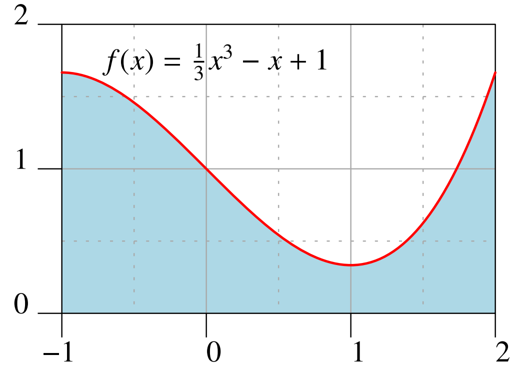
(pues $(-a)^{p+1} = a^{p+1}$ y $(-b)^{p+1} = b^{p+1}$, ya que el entero $p+1$ es par).

(3) Caso donde $a < 0$ y $b > 0$. Por los casos (1) y (2), ya sabemos que la función $f(x) = x^p$ es integrable en ambos intervalos $[a,0] \subset (-\infty,0]$ y $[0,b] \subset [0,+\infty)$. Entonces, es integrable en el intervalo $[a,b] = [a,0] \cup [0,b]$, y

$$\int_a^b x^p\,dx \;=\; \int_a^0 x^p\,dx \;+\; \int_0^b x^p\,dx \;=\; \frac{0^{p+1}-a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{p+1}-0^{p+1}}{p+1} \;=\; \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}\,\cdot \qquad \square$$

La proposición anterior no sólo permite integrar la función $x \mapsto x^p$ ($p \in \mathbb{N}$) en cualquier intervalo $[a, b]$ (con $a < b$); además permite integrar todas las funciones polinomiales, usando la propiedad de linealidad de la integral. Aquí hay un ejemplo.

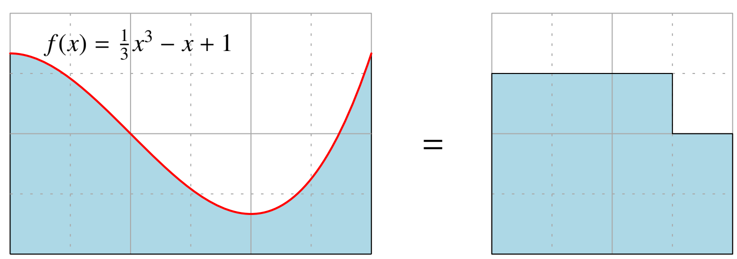
Ejemplo 86. Queremos integrar la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ en el intervalo $[-1, 2]$.



Para ello, se observa que la función f es una combinación lineal de las tres funciones $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^1$ y $x \mapsto x^0 = 1$. Así, es integrable en el intervalo $[-1, 2]$, y

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} \Big(\frac{1}{3}x^3 - x + 1\Big)\, dx &= \frac{1}{3} \cdot \int_{-1}^{2} x^3\, dx - \int_{-1}^{2} x^1\, dx + \int_{-1}^{2} x^0\, dx \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2^4 - (-1)^4}{4} - \frac{2^2 - (-1)^2}{2} + \frac{2^1 - (-1)^1}{1} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{1} = \frac{5 - 6 + 12}{4} = \frac{11}{4} \cdot \end{aligned}$$

Dicho de otro modo, demostramos que las siguientes dos áreas son iguales:



Vínculo con la derivada *A partir de ahora y hasta el final de la Sección 4.2, se supone conocida la noción de* función derivada*, que será introducida más adelante en el curso. Los lectores que no conocen esta noción pueden omitir esta parte, e ir directamente a la Sección 4.3.*

Observación 87. La fórmula que expresa la integral de la función $f(x) = x^p$ ($p \in \mathbb{N}$) en el intervalo $[a, b]$ (con $a < b$) también se puede escribir

$$\int_a^b x^p\, dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p + 1} = F(b) - F(a), \quad \text{con } F(x) = \frac{x^{p+1}}{p + 1} \cdot$$

Se observa que la función $F(x) = x^{p+1}/(p + 1)$ que permite expresar dicha integral es una *primitiva* de la función $f(x) = x^p$, es decir: una función derivable cuya derivada es igual a f: $F'(x) = f(x)$. Usando la propiedad de linealidad de la integral, se puede generalizar esta observación a todas las funciones polinomiales del modo siguiente.

Proposición 88. *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función polinomial, entonces* f *es integrable en cualquier intervalo* $[a, b]$ *(con* $a < b$*), y su integral en dicho intervalo está dada por*

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(b) - F(a)\,,$$

donde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es cualquier función polinomial tal que* $F' = f$.

Demostración. Escribamos $f(x) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p x^p$ y $F(x) = \sum_{p=0}^{n+1} \beta_p x^p$, suponiendo que f y F son polinomios de grados n y $n+1$, respectivamente. Como $F' = f$, tenemos que

$$F'(x) \;=\; \sum_{p=1}^{n+1} p\beta_p x^{p-1} \;=\; \sum_{p=0}^{n} (p+1)\beta_{p+1} x^p \;=\; f(x) \;=\; \sum_{p=0}^{n} \alpha_p x^p\,,$$

de tal modo que $\alpha_p = (p+1)\beta_{p+1}$ para todo $p = 0, \ldots, n$ (identificando los coeficientes de los polinomios F' y f). Combinando la linealidad de la integral con la Prop. 84, se deduce que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx \;&=\; \int_a^b \left(\sum_{p=0}^{n} \alpha_p x^p\right) dx \;=\; \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \cdot \int_a^b x^p\,dx \\
&=\; \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \cdot \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} \;=\; \sum_{p=0}^{n} \beta_{p+1}(b^{p+1} - a^{p+1}) \qquad \text{(pues } \alpha_p/(p+1) = \beta_{p+1}\text{)} \\
&=\; \sum_{p=1}^{n+1} \beta_p(b^p - a^p) \;=\; \sum_{p=0}^{n+1} \beta_p(b^p - a^p) \qquad \text{(pues } b^0 - a^0 = 1 - 1 = 0\text{)} \\
&=\; \sum_{p=0}^{n+1} \beta_p b^p - \sum_{p=0}^{n+1} \beta_p a^p \;=\; F(b) - F(a)\,.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 89. Volviendo a la función polinomial $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ del Ejemplo 86 p. 37, se observa que una primitiva de la función f es la función

$$F(x) \;=\; \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x\,.$$

Así tenemos que $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx \;=\; F(2) - F(-1) \;=\; \frac{4}{3} - \left(-\frac{17}{12}\right) \;=\; \frac{16+17}{12} \;=\; \frac{11}{4}\cdot$

4.3. Integral de la función $t \mapsto 1/t$

En esta sección, nos interesamos en el caso particular de la función $f(t) = 1/t$ en el intervalo $(0, +\infty)$. Como f es monótona decreciente en dicho intervalo, es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$ tal que $0 < a < b$ por el Teorema 30 p. 12. Una propiedad notable de la integral de la función $f(t) = 1/t$ es la siguiente:

Proposición 90. *Para todos* $a, b, \lambda > 0$ *tales que* $a < b$*, tenemos que:*

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{1}{t}\,dt \;=\; \int_a^b \frac{1}{t}\,dt\,.$$

Demostración. Como la función $f(t) = 1/t$ es integrable en el intervalo $[a, b]$, la función $g(t) = f(t/\lambda)$ es integrable en el intervalo $[\lambda a, \lambda b]$ (por el Ejercicio 72 p. 29), y

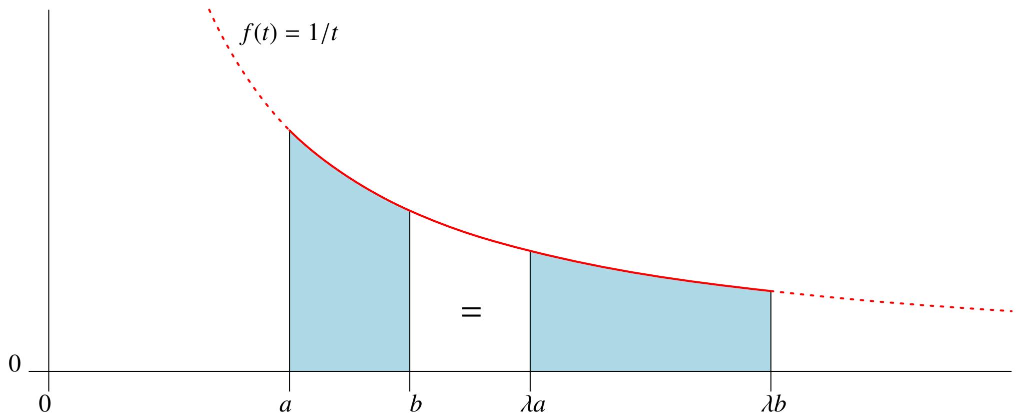
$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)\, dt \;=\; \lambda \cdot \int_a^b f(t)\, dt \;=\; \lambda \cdot \int_a^b \frac{1}{t}\, dt\,.$$

Pero también se observa que $g(t) = f(t/\lambda) = \lambda/t$, de tal modo que

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)\, dt \;=\; \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{\lambda}{t}\, dt \;=\; \lambda \cdot \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{1}{t}\, dt\,.$$

Dividiendo ambos lados derechos por $\lambda > 0$, se deduce la igualdad deseada. □

Observación 91. Geométricamente, la igualdad anterior se puede interpretar del modo siguiente: cuando se dilata (horizontalmente) el intervalo de trabajo $[a, b]$ según un factor $\lambda > 0$, la región correspondiente abajo de la gráfica de f se dilata (verticalmente) según el factor $1/\lambda$, debido a la definición particular de la función f. Al final, las dilataciones horizontal y vertical se compensan, de tal modo que el área de la región correspondiente no cambia:



(En la figura anterior, tomamos $[a, b] = [1, \frac{3}{2}]$ y $\lambda = 2$.) Dicho de otro modo, la integral $\int_a^b \frac{1}{t}\, dt$ no depende de los extremos $a, b > 0$; sólo depende del cociente b/a.

No se puede expresar como un polinomio o como una fracción racional la integral $\int_a^b \frac{1}{t}\, dt$ en función de los extremos a y b. Para ello, se necesita introducir una nueva función:

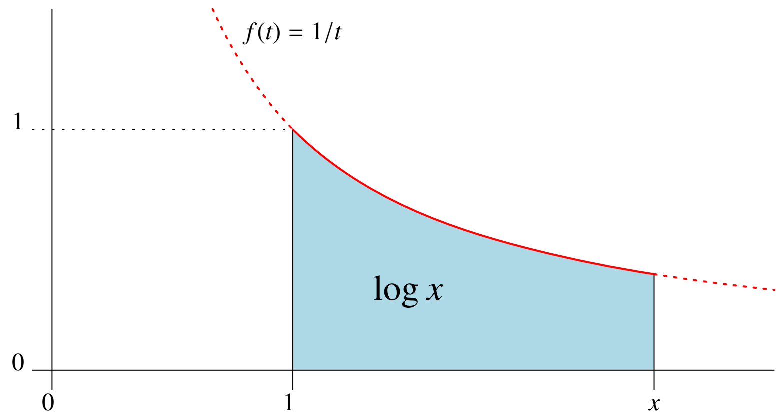
Definición 92 (Función logaritmo)**.** Dado un número real $x > 0$, se llama *logaritmo* de x y se escribe $\log x$ al número real definido por

$$\log x \;=\; \int_1^x \frac{1}{t}\, dt\,.$$

Observación 93. La definición anterior usa la notación extendida para la integral (véase Sección 3.5), pues el número $x > 0$ puede ser menor, igual o mayor a 1. En particular, como $f(t) = 1/t > 0$ para todo $t \in (0, +\infty)$, es claro que:

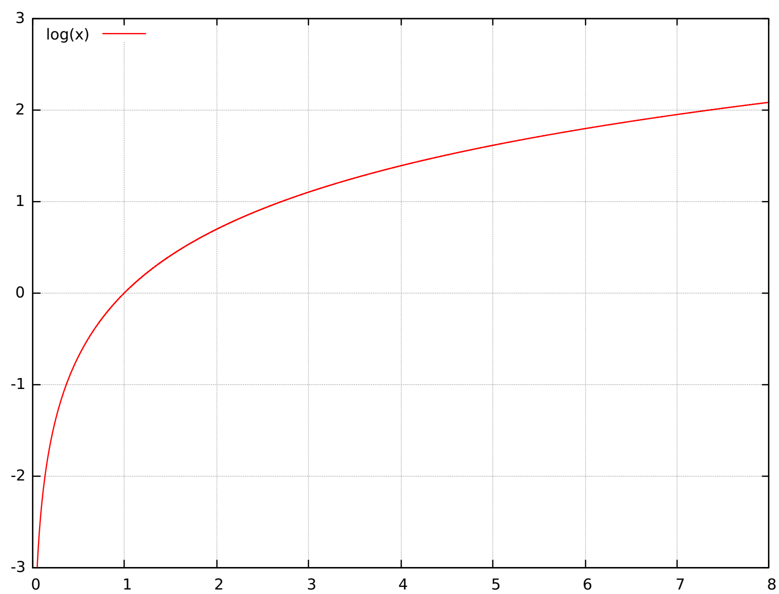
$$\log x \;=\; \begin{cases} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \;\geq\; 0 & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ -\int_x^1 \frac{1}{t}\, dt \;\leq\; 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Así, el número $\log x$ representa el área algebraica de la región abajo de la gráfica de la función $f(t) = 1/t$ entre los dos extremos $t = 1$ y $t = x$, expresada con un signo positivo si $x > 1$, y con un signo negativo si $x < 1$:



Se demuestra que:

Proposición 94. *La función* $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *es estrictamente creciente en* $(0, +\infty)$*:*



Demostración. Sean $x, y > 0$ tales que $x < y$. Tenemos que

$$\log y - \log x \;=\; \int_1^y \frac{1}{t}\,dt - \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \;=\; \int_x^y \frac{1}{t}\,dt \;\geq\; (y - x) \cdot \frac{1}{y} \;>0$$

pues $x < y$ y $f(t) = \frac{1}{t} \geq \frac{1}{y}$ para todo $t \in [x, y]$. Luego, tenemos que $\log x < \log y$. $\square$

La siguiente proposición expresa la propiedad fundamental del logaritmo:

Proposición 95. *Para todos* $x, y > 0$*, tenemos que:*

$$\log(xy) = \log x + \log y, \qquad \log(x/y) = \log x - \log y \qquad y \qquad \log(1/x) = -\log x\,.$$

Demostración. Primera igualdad: usando la Prop. 90, se observa que

$$\log(xy) \;=\; \int_1^{xy} \frac{1}{t}\,dt \;=\; \int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt + \int_{\cancel{x}1}^{\cancel{x}y} \frac{1}{t}\,dt \;=\; \log x + \log y\,.$$

Segunda igualdad: se sigue de que $\log x = \log((x/y) \times y) = \log(x/y) + \log y$.
Tercera igualdad: se sigue de la igualdad anterior, observando que $\log 1 = 0$. □

Gracias a la función logaritmo, podemos ahora expresar la integral de la función $f(t) = 1/t$ en cualquier intervalo $[a, b] \subset (0, +\infty)$:

Proposición 96. *Para todos $a, b > 0$, tenemos que*

$$\int_a^b \frac{1}{t}\,dt \;=\; \log b - \log a \;=\; \log \frac{b}{a}\cdot$$

(Se observa que la última expresión sólo depende del cociente b/a.)

Demostración. Inmediato por la definición de la función logaritmo (ejercicio). □

Ejercicio 97. El objetivo de este ejercicio es demostrar las desigualdades

$$1 - \frac{1}{x} \;\le\; \log x \;\le\; x - 1 \qquad\qquad \text{para todo } x > 0\,.$$

(1) Verificar que las desigualdades anteriores se cumplen (trivialmente) cuando $x = 1$.
(2) Ahora, se considera el caso donde $x > 1$.
  (a) Verificar que $\frac{1}{x} \le \frac{1}{t} \le 1$ para todo $t \in [1, x]$.
  (b) Usando la monotonía de la integral, deducir que $1 - \frac{1}{x} = (x-1)\cdot\frac{1}{x} \le \log x \le x - 1$.
(3) Adaptar el razonamiento efectuado en (2) para el caso donde $x < 1$.