

# Pérdidas de pretensado

## Clasificación

➔ Instantáneas

➔ Diferidas

<i>Instantánea</i>	<i>Nombre EC2</i>	<i>Diferida</i>	<i>Nombre EC2</i>
Rozamiento (fricción)	$\Delta P_{\mu}$	Retracción	$\Delta P_{c+s+r}$
Penetración de cuñas	$\Delta P_{sl}$	Fluencia	
Acortamiento elástico	$\Delta P_{el}$	Relajación	

# Pérdidas de pretensado

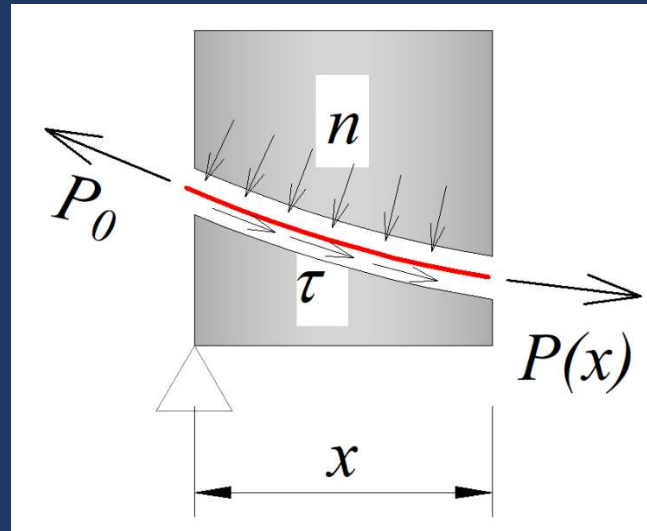
## Según el tipo de piezas

<i>Tipo</i>	$\Delta P_{\mu}$	$\Delta P_{sl}$	$\Delta P_{el}$	$\Delta P_{c+s+r}$
Pretensada	(*)	SI	SI	SI
Postensada	SI	SI	SI	SI

(\*) En trazados rectos suele no considerarse. Es relevante en pizas con desviadores.

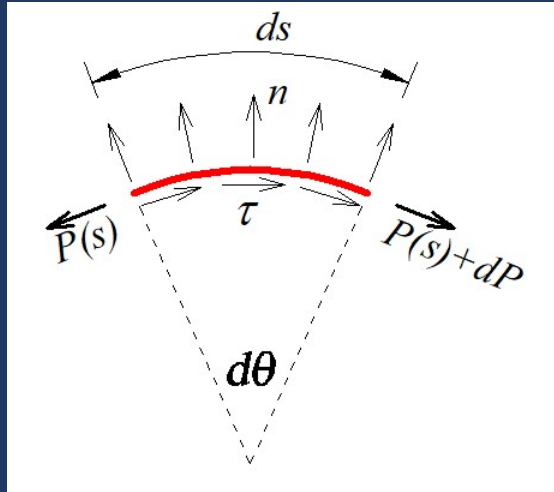
# Pérdidas instantáneas

## Rozamiento

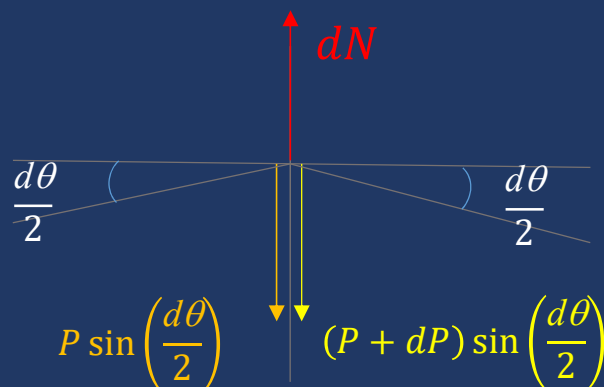


# Pérdidas instantáneas

## Rozamiento en curva:



Rozamiento en curva:  $dP = -\mu P d\theta$



Admitamos que  $\tau$  y  $n$  son constants en  $ds$ :

$$dN = P \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + (P + dP) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \quad (1)$$

$$dN = 2 P \frac{d\theta}{2} = P d\theta \quad (2)$$

$$dN = n ds \quad (3)$$

$$-dP = \tau ds = \mu \cdot n \cdot ds = \mu \cdot dN \quad (4)$$

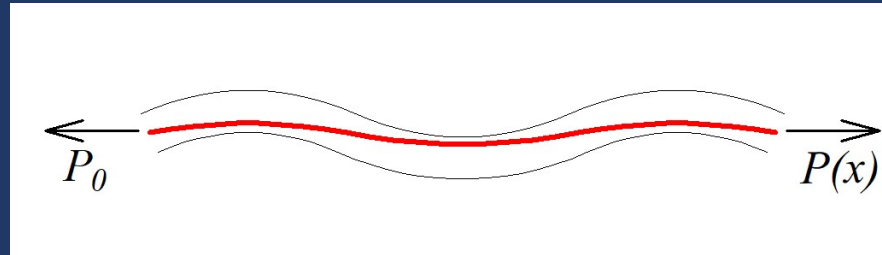
$$dP = -\mu P d\theta \Rightarrow \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = - \int_{\theta_0}^{\theta} \mu d\theta \quad (5)$$

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\mu(\theta - \theta_0) \quad (6)$$

$$P(x) = P_0 e^{-\mu\theta(x)} \quad (7)$$

# Pérdidas instantáneas

## Rozamiento parásito (en recta):



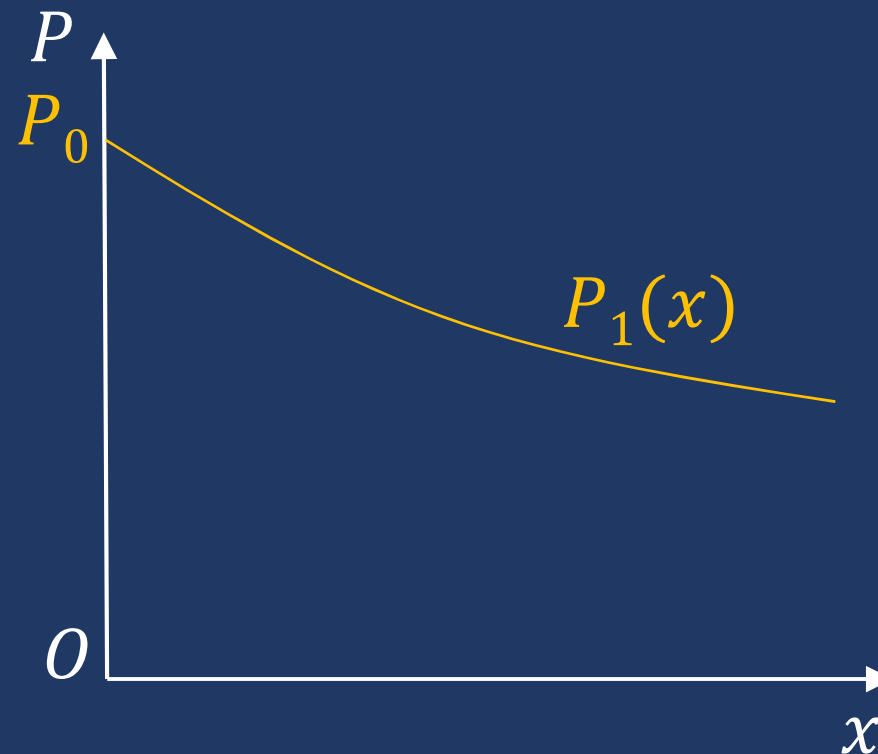
$$\text{Rozamiento parásito: } dP = -KPdx$$

# Pérdidas instantáneas

## Rozamiento

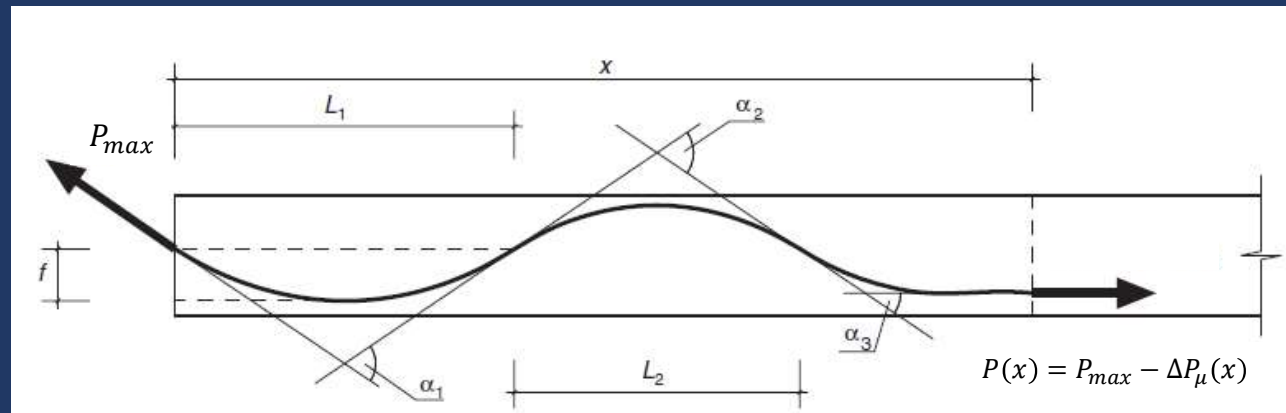
$$P_1(x) = P(x) = P_0 e^{-\mu\theta(x) - Kx}$$

$$\Delta P(x) = P_0 (1 - e^{-\mu\theta(x) - Kx}) \text{ (en valor absoluto)}$$



# Pérdidas instantáneas

## Rozamiento: normativa



$$\Delta P_\mu(x) = P_{m\acute{a}x} (1 - e^{-\mu(\theta + kx)})$$

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i$$

Si  $\mu(\theta + kx) \leq 0.30$ , puede considerarse:

$$\Delta P_\mu(x) = P_{m\acute{a}x} [\mu(\theta(x) + kx)]$$

# Pérdidas instantáneas

## Rozamiento: normativa UNE-EN 1992-1-1

	Armaduras internas <sup>1)</sup>	Armaduras externas no adherentes			
		Vaina de acero /no lubricado	Vaina HDPE /no lubricado	Vaina de acero/lubricado	Vaina HDPE/ lubricado
Alambre estirado en frío	0,17	0,25	0,14	0,18	0,12
Cordón	0,19	0,24	0,12	0,16	0,10
Barra deformada	0,65	–	–	–	–
Barra redonda lisa	0,33	–	–	–	–

1) Para armaduras activas que ocupan alrededor de la mitad de la vaina.

con  $k \in [0.005; 0.01]$



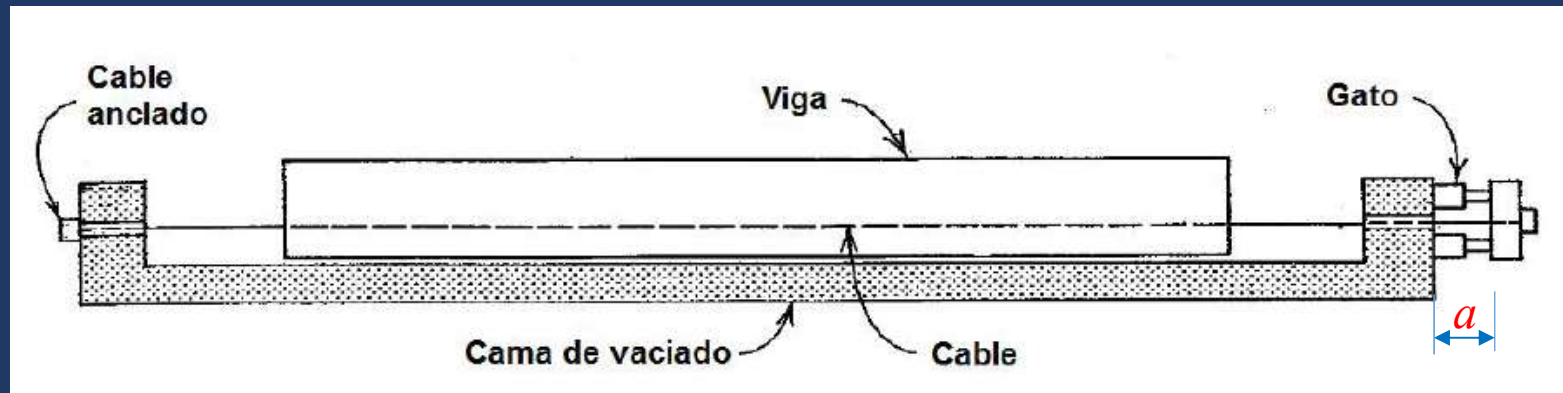
# Pérdidas instantáneas

## Rozamiento: recomendación BBRV-CONA-CMX

Tipo de vaina	Valores recomendados		Rango de valores	
	$\mu$ [rad <sup>-1</sup> ]	$k$ (rad/m)	$\mu$ [rad <sup>-1</sup> ]	$k$ (rad/m)
Vaina de acero corrugado	0.18	0.005	0.17 - 0.19	0.004 - 0.007
Vaina de acero liso	0.18		0.16 - 0.24	
Vaina de plástico corrugado	0.12		0.10 - 0.14	
Vaina de plástico liso	0.12		0.10 - 0.14	
Monocordón (engrasado/encerado)	0.06	0.009	0.05 - 0.07	0.004 - 0.010

# Pérdidas instantáneas

## Penetración de cuñas: piezas pretesas



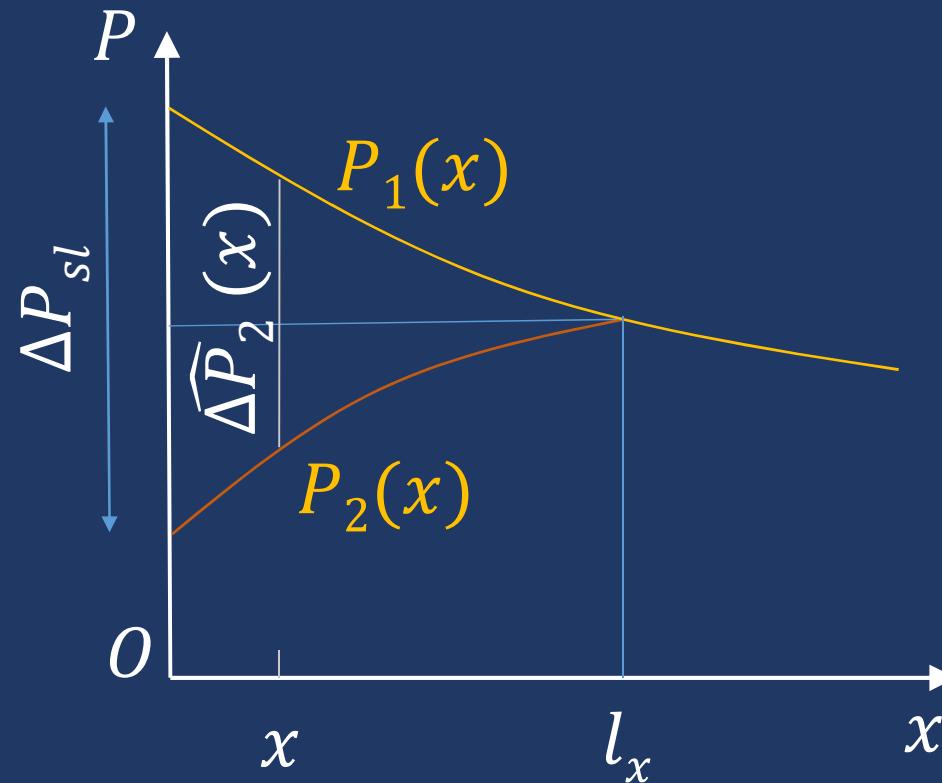
Arthur Nilson 1995

$$\Delta\varepsilon = \frac{a}{L}$$

$$\Delta P_{sl} = \frac{a}{L} E_p A_p$$

# Pérdidas instantáneas

## Penetración de cuñas: piezas postesas



$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p,0} + \Delta\varepsilon_p$$

$$a = \int_0^{l_x} \Delta\varepsilon_p dx = \int_0^{l_x} \frac{P_1(x) - P_2(x)}{E_p A_p} dx$$

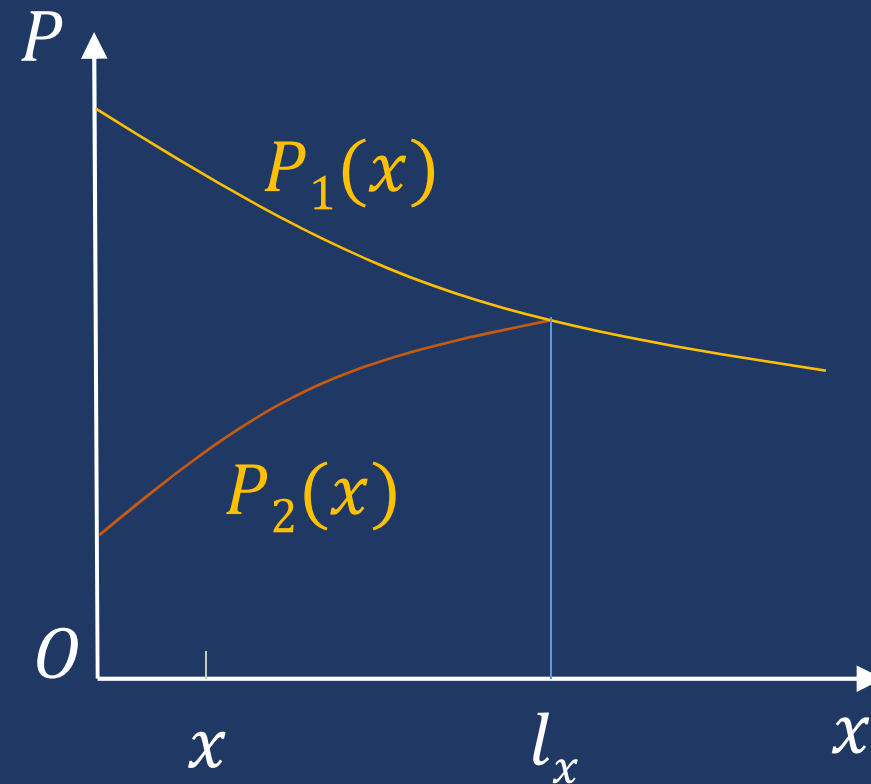
# Pérdidas instantáneas

## Penetración de cuñas: piezas postesas

$$a = \int_0^{l_x} \Delta \varepsilon_p dx = \int_0^{l_x} \frac{P_1(x) - P_2(x)}{E_p A_p} dx$$

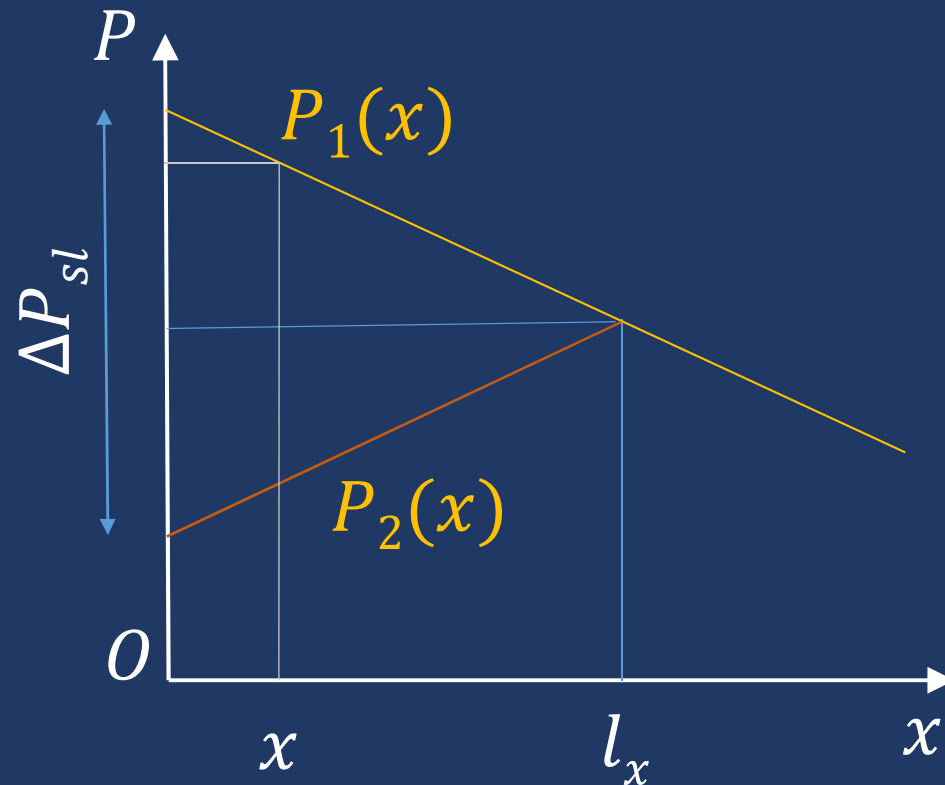
$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p,0} + \Delta \varepsilon_p$$

$$a = \frac{S}{E_p A_p}$$



# Pérdidas instantáneas

## Penetración de cuñas: piezas postesas



$$a = \frac{\Delta P_{sl} l_x}{2} \frac{1}{E_p A_p}$$

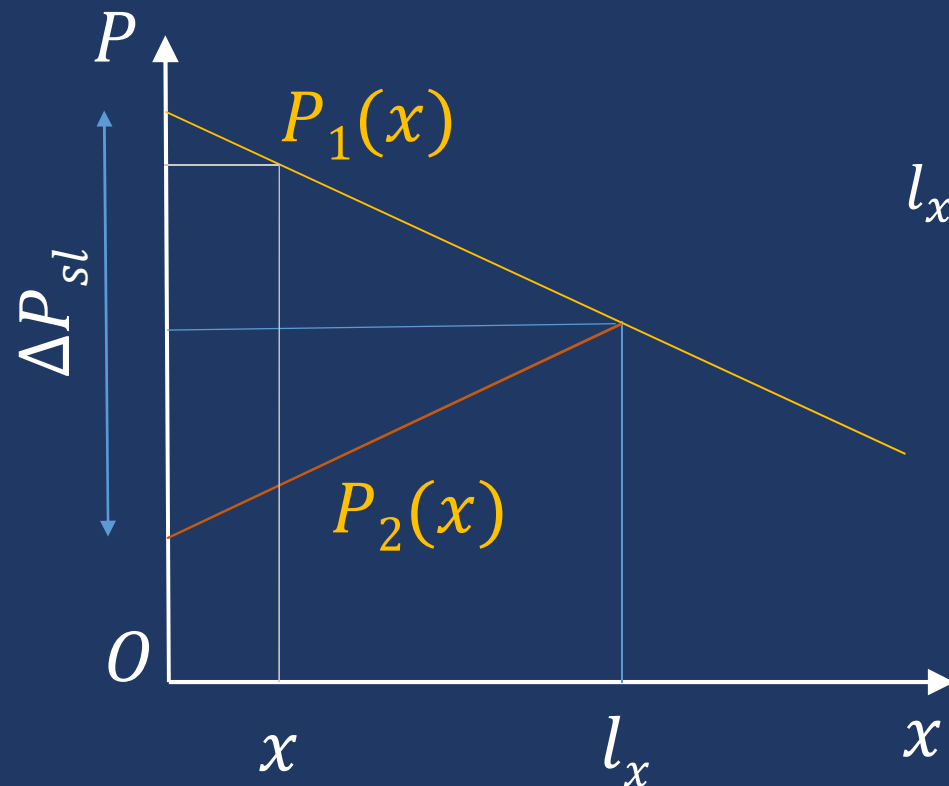
$$\frac{\Delta P_{sl}}{2l_x} = \frac{P_0 - P_1(x)}{x}$$

# Pérdidas instantáneas

## Penetración de cuñas: piezas postesas

### Nota:

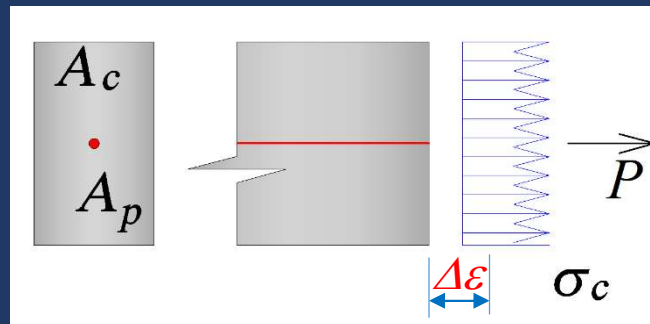
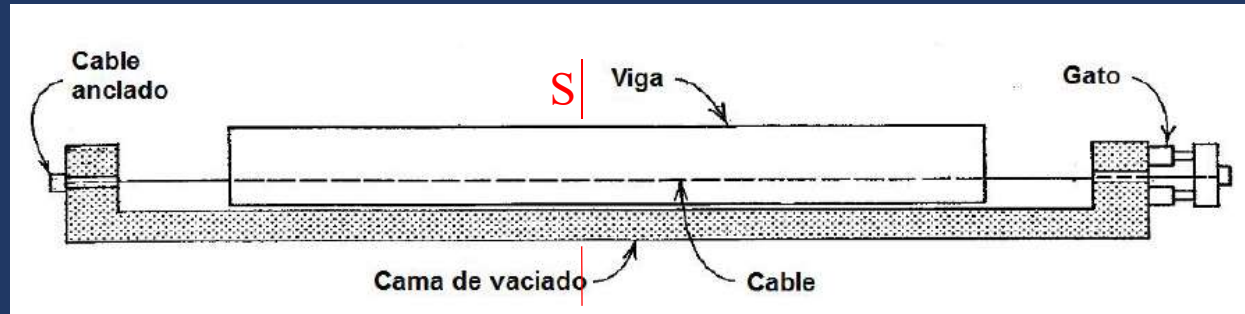
para el caso de una viga con trazado parabólico en el que se cumpla  $\mu(\theta + kx) \leq 0.30$ , con luz  $L$  y flecha  $f$  (diapositiva 7), la longitud afectada por la penetración de la cuña a partir del anclaje puede calcularse como:



$$l_x = L \sqrt{\frac{a \times E_p}{\sigma_{p,m\acute{a}x} \times \mu \times (8f + kL^2)}}$$

# Pérdidas instantáneas

## Acortamiento elástico: piezas pretesas



$$N_c + P = \int_{A_c} \sigma_c dA + P = 0$$

# Pérdidas instantáneas

## Acortamiento elástico: piezas pretesas

$$N_c = E_c A_c \Delta \varepsilon \quad (1)$$

$$N_c = -P = -P_0 - \Delta P \quad (2)$$

$$\text{donde } \begin{cases} P_0 = E_p A_p \varepsilon_p \\ \Delta P = E_p A_p \Delta \varepsilon_p \end{cases}$$

$$\text{Compatibilidad: } \Delta \varepsilon_c = \Delta \varepsilon_p = \Delta \varepsilon$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon &= \frac{N_c}{E_c A_c} \\ \Delta \varepsilon_p &= \frac{\Delta P}{E_p A_p} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{N_c}{E_c A_c} = \frac{\Delta P}{E_p A_p} \quad (3)$$

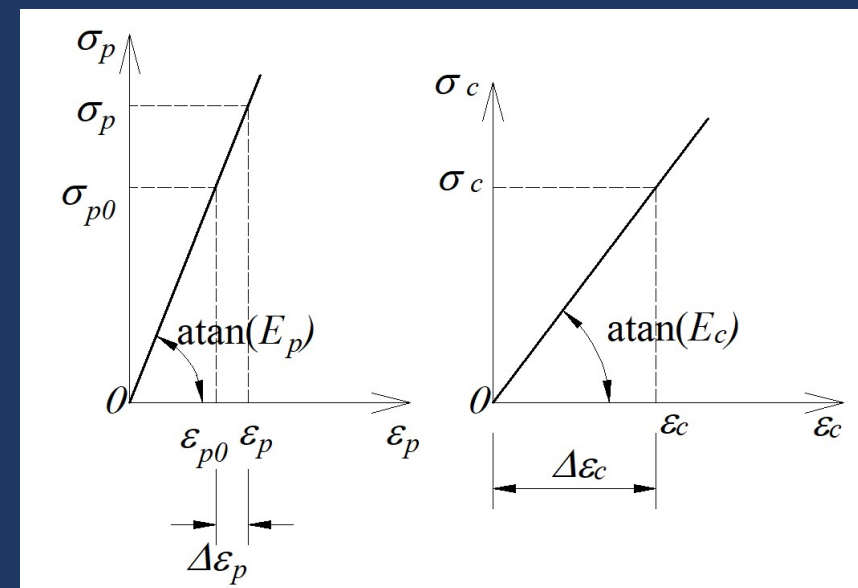
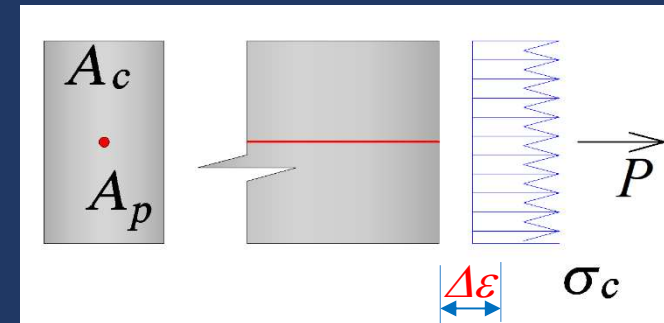
$$\Delta P = -P_0 - N_c = -P_0 - \frac{\Delta P}{E_p A_p} E_c A_c \quad (4)$$

$$\Delta P = -\frac{P_0}{(E_p A_p + E_c A_c)} E_p A_p \quad (5)$$

$$\Delta P = -\frac{P_0}{E_c (A_c + n A_p)} E_p A_p \quad (6)$$

$A_c + n A_p = A_c^*$ : área de la sección transformada.

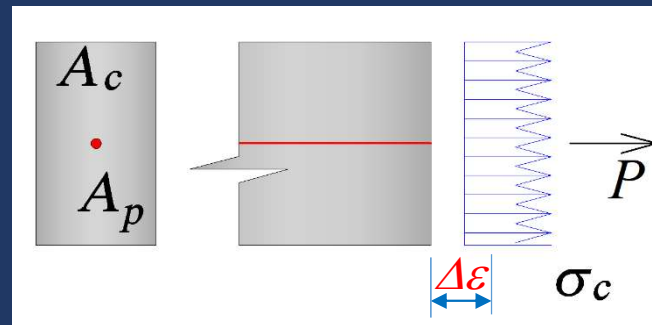
$$n = \frac{E_p}{E_c}$$





# Pérdidas instantáneas

## Acortamiento elástico: piezas pretesas



$$\Delta P = - \frac{P_0}{\left( E_p A_p + E_c A_c \right)} E_p A_p$$

$$\sigma_{cp} = - \frac{P_0}{A_c + \frac{E_p}{E_c} A_p}$$

$$\Delta P = \Delta P_{el} = \frac{\sigma_{cp}}{E_c} E_p A_p$$

# Pérdidas instantáneas

## Acortamiento elástico: piezas postesas

Supongamos que la fuerza total de pretensado es  $P_0$  y que esta fuerza es introducida equitativamente en las  $n$  tendidas. Consideremos además que el área total de los cordones también está repartida en las  $n$  tendidas, esto es:

$$P_n = \frac{P_0}{n} \quad \text{y} \quad A_{p(n)} = \frac{A_p}{n}$$

Cada tendida produce un incremento de tensión en el hormigón de:

$$\Delta\sigma_{(n)} = \frac{\sigma_{cp}}{n}$$

y por lo tanto un acortamiento de:

$$\Delta\varepsilon_{(n)} = \frac{\sigma_{cp}}{nE_c}$$

La pérdida por acortamiento elástico que se produce en un cable en cada nueva tendida es:

$$\Delta P_{(n)} = \frac{\sigma_{cp}}{nE_c} E_p \frac{A_p}{n}$$

# Pérdidas instantáneas

## Acortamiento elástico: piezas postesas

Si el orden de tensado es *Cable 1, Cable 2, ..., Cable n*, en la tensada del *Cable n* tenemos:

$$\text{Cable 1: } \Delta P_{(1)} = (n - 1) \frac{\sigma_{cp} E_p A_p}{n^2 E_c}$$

$$\text{Cable 2: } \Delta P_{(2)} = (n - 2) \frac{\sigma_{cp} E_p A_p}{n^2 E_c}$$

·  
·

$$\text{Cable } n-1: \Delta P_{(n-1)} = (n - (n - 1)) \frac{\sigma_{cp} E_p A_p}{n^2 E_c}$$

$$\text{Cable } n: \Delta P_{(n)} = 0$$

# Pérdidas instantáneas

## Acortamiento elástico: piezas postesas

Luego la pérdida total por acortamiento elástico es:

$$\Delta P_{el} = [(n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + 1] \frac{\sigma_{cp} E_p A_p}{n^2 E_c}$$

$$\Delta P_{el} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(n - i)}{n^2} \sigma_{cp} \frac{E_p A_p}{E_c}$$

$$\Delta P_{el} = \frac{(n - 1)}{2n} \sigma_{cp} \frac{E_p A_p}{E_{cm}(t)}$$

Nota:

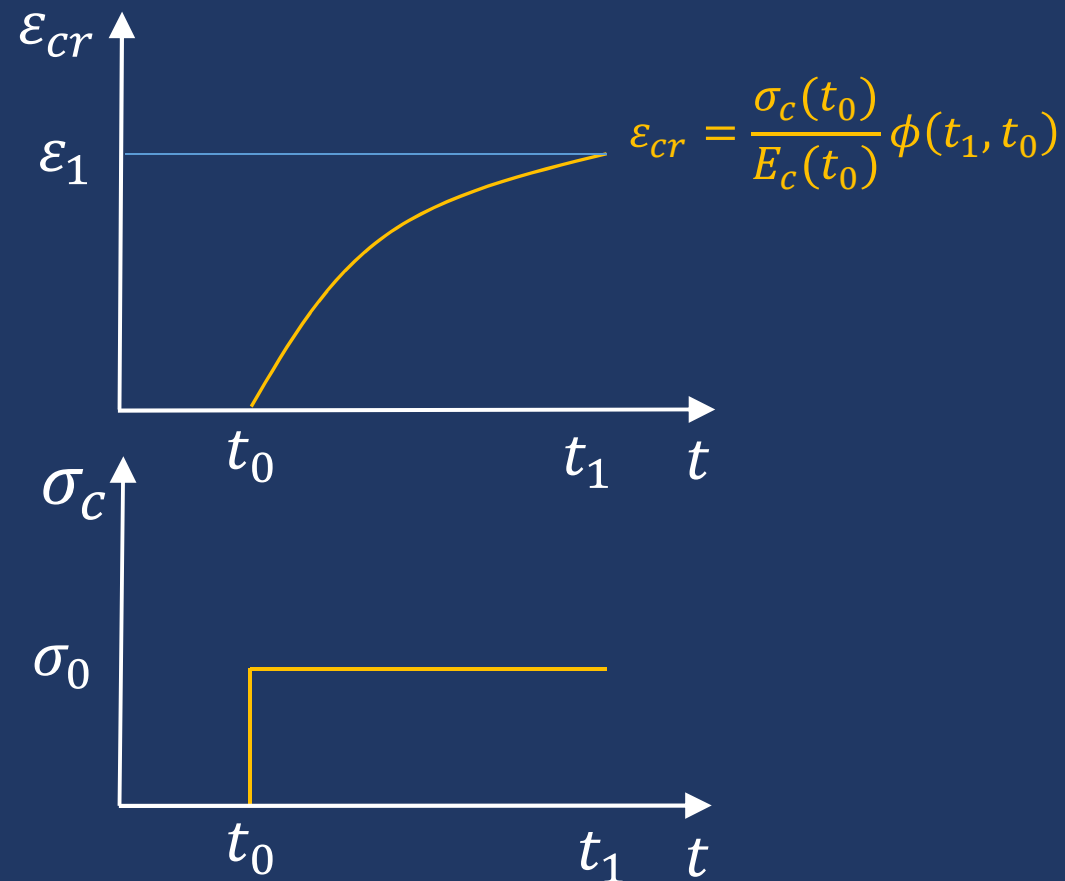
$$\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n + 1)}{2}$$

# Pérdidas diferidas

**Diapositiva en blanco**

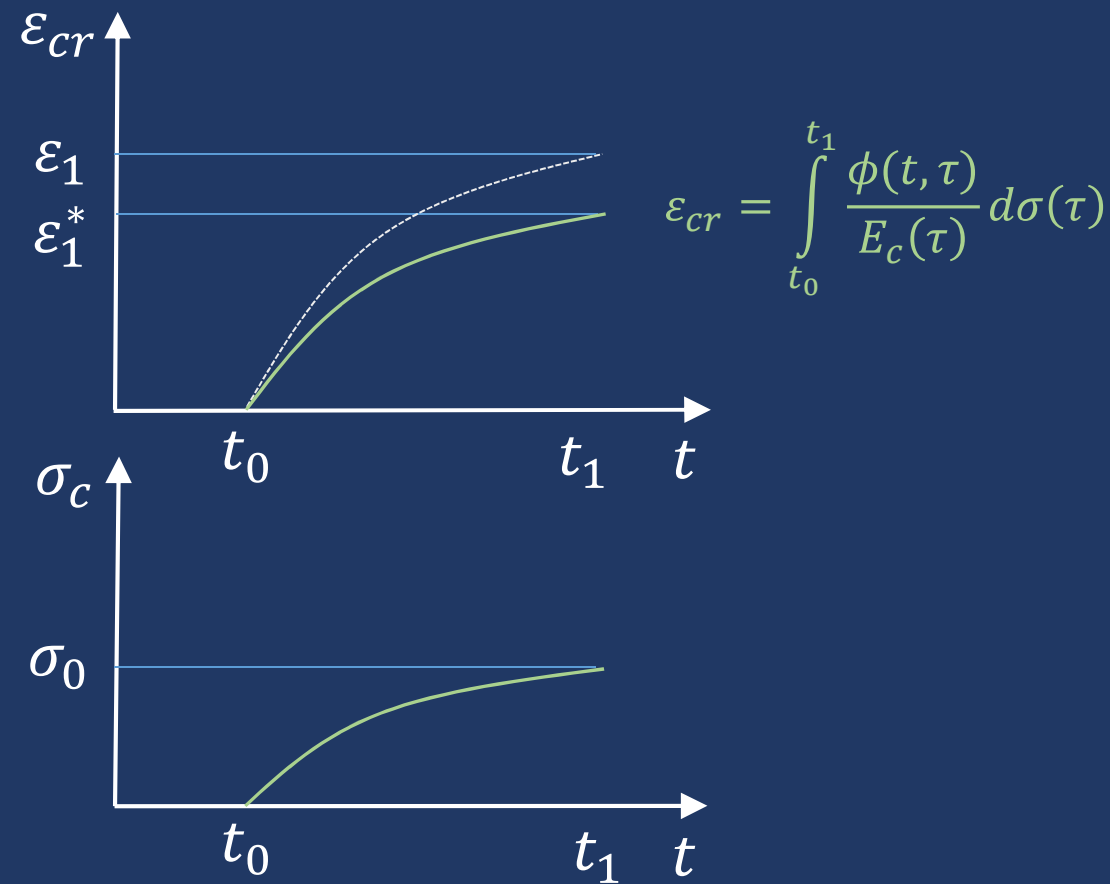
# Pérdidas diferidas

## Comportamiento reológico del hormigón: tensión constante



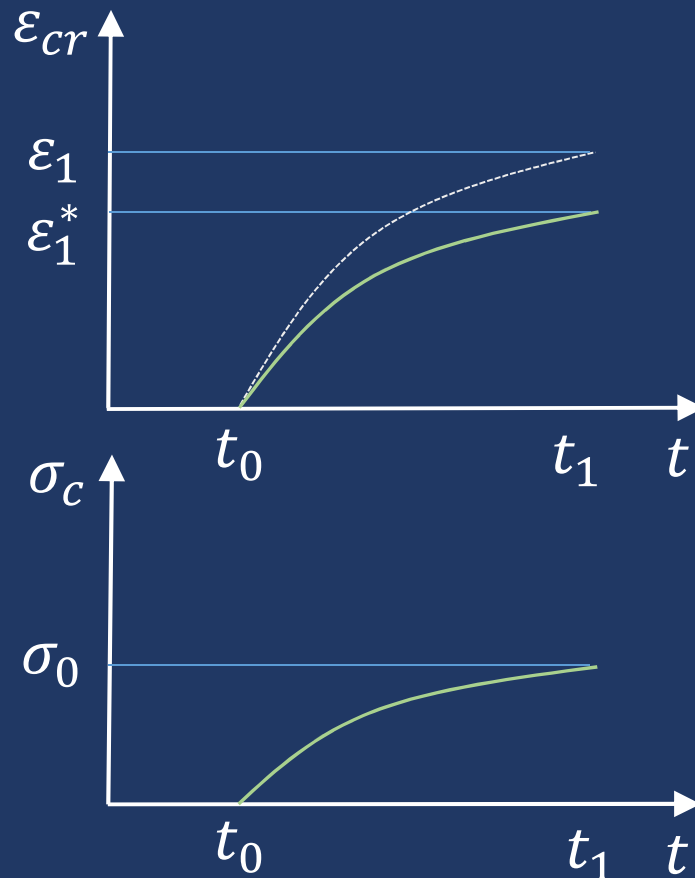
# Pérdidas diferidas

## Comportamiento reológico del hormigón: tensión variable



# Hormigón

## Coeficiente de envejecimiento:



$$\int_{t_0^+}^{t_1} \frac{1}{E_c(\tau)} (1 + \phi(t, \tau)) d\sigma(\tau)$$

$$= \frac{(1 + \chi(t_1, t_0)\phi(t_1, t_0))}{E_c(t_0)} \Delta\sigma_c(t_1, t_0) \quad (*)$$

$$\varepsilon_{cr} = \frac{\Delta\sigma_c(t_1, t_0)}{E_c(t_0)} \chi(t_1, t_0)\phi(t_1, t_0) = \frac{\sigma_c(t_1)}{E_c(t_0)} \chi(t_1, t_0)\phi(t_1, t_0)$$

$\chi(t_1, t_0)$ : coeficiente de envejecimiento

$$\chi(t, t_0) = \left[ 1 - \frac{E_R(t, t_0)}{E_c(t_0)} \right]^{-1} - \frac{1}{\phi(t, t_0)}$$

Fórmula simplificada (\*\*):

$$\chi(t, t_0) = 0.9 + \left( \frac{\sqrt{t_0}}{1 + \sqrt{t_0}} - 0.90 \right) \left( \frac{t - t_0}{t} \right)$$

(\*) Bazant, Z. Prediction of concrete creep effects using age-adjusted effective modulus method.

(\*\*) Fernández Ruiz M. Evaluación no lineal de los efectos estructurales producidos por las deformaciones diferidas del hormigón y el acero.



# Pérdidas diferidas

## Ecuación constitutiva del hormigón en el tiempo:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} (1 + \phi(t, t_0)) + \int_{t_0^+}^t \frac{1}{E_c(\tau)} (1 + \phi(t, \tau)) d\sigma(\tau) + \varepsilon_{sh}(t, t_s)$$

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} (1 + \phi(t, t_0)) + \frac{(1 + \chi(t, t_0)\phi(t, t_0))}{E_c(t_0)} \Delta\sigma_c(t, t_0) + \varepsilon_{sh}(t, t_0)$$

$$\Delta\varepsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \phi(t, t_0) + \frac{(1 + \chi(t, t_0)\phi(t, t_0))}{E_c(t_0)} \Delta\sigma_c(t, t_0) + \varepsilon_{sh}(t, t_0)$$

# Pérdidas diferidas

## Ecuación para obtener las pérdidas de pretensado: adherente

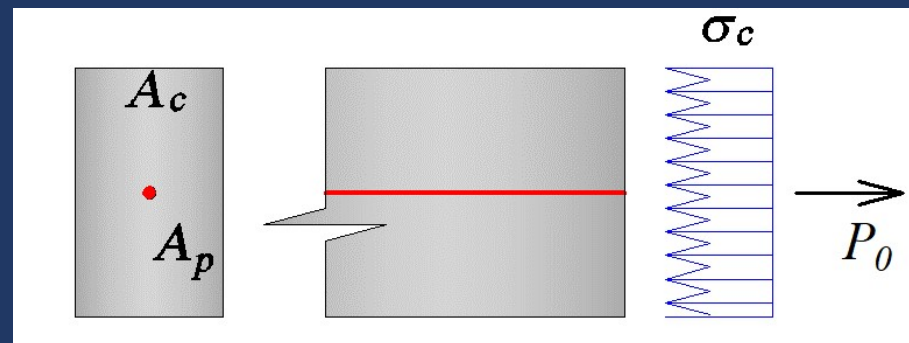
### Hipótesis:

- Las tensiones de compresión no superan  $0.45 f_{cm}$
- El hormigón no está fisurado
- Comportamiento elástico lineal de los materiales (acero y hormigón)
- Es válida la hipótesis de Navier-Bernoulli.
- **Adherencia perfecta entre el acero de pretensado y el hormigón**
- Se desprecia la armadura pasiva.
- Vigas isostáticas

# Pérdidas diferidas

## Ecuación para obtener las pérdidas de pretensado: adherente

En  $t = t_0$

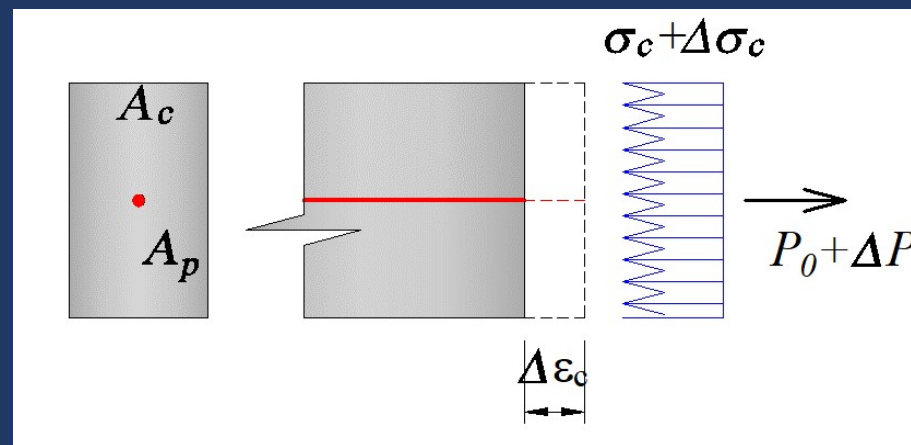


$$\sigma_c(t_0) = -\frac{P_0}{A_c} \quad (1)$$

# Pérdidas diferidas

## Ecuación para obtener las pérdidas de pretensado: adherente

En  $t$



$$\Delta\sigma_c = -\frac{\Delta P}{A_c} \quad (2)$$

$$\Delta\varepsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)}\phi(t, t_0) + \frac{(1 + \chi(t, t_0)\phi(t, t_0))}{E_c(t_0)}\Delta\sigma_c(t, t_0) + \varepsilon_{sh}(t, t_0) \quad (3)$$

$$\Delta\varepsilon_p = \frac{\Delta P}{E_p A_p} + \frac{\Delta\overline{\sigma}_{pr}}{E_p} \quad (4)$$

# Pérdidas diferidas

## Ecuación para obtener las pérdidas de pretensado: adherente

Compatibilidad implica:  $\Delta\varepsilon_c = \Delta\varepsilon_p$

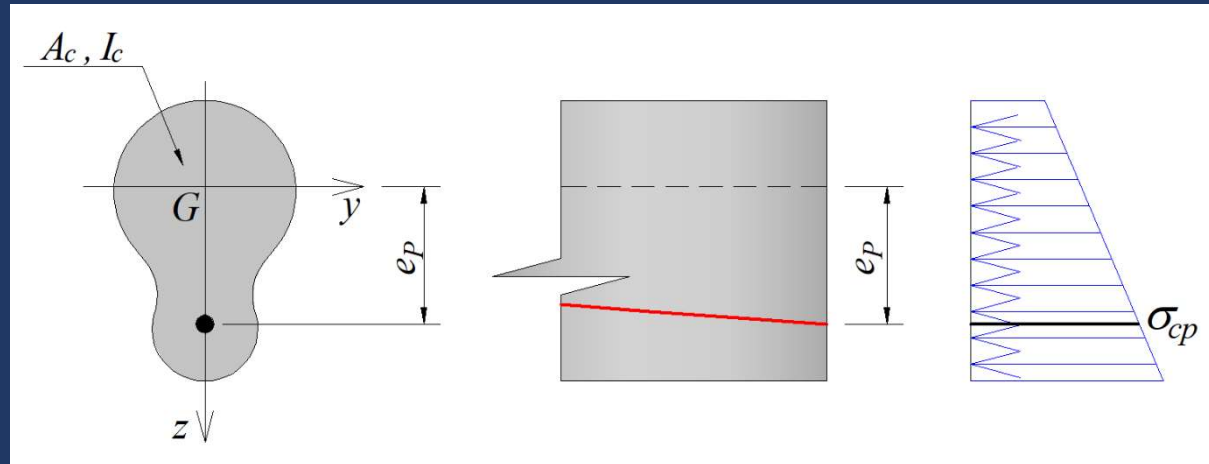
$$\frac{\Delta P}{E_p A_p} + \frac{\Delta \overline{\sigma}_{pr}}{E_p} = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \phi(t, t_0) + \frac{(1 + \chi(t, t_0) \phi(t, t_0))}{E_c(t_0)} \left( -\frac{\Delta P}{A_c} \right) + \varepsilon_{sh}(t, t_0) \quad (5)$$

$$\Delta P = \frac{\frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \phi(t, t_0) + \varepsilon_{sh}(t, t_0) - \frac{\Delta \overline{\sigma}_{pr}}{E_p}}{\frac{1}{E_p A_p} + \frac{(1 + \chi(t, t_0) \phi(t, t_0))}{A_c E_c(t_0)}} \quad (6)$$

$$\Delta P = \frac{\left( \frac{E_p}{E_c(t_0)} \sigma_c(t_0) \phi(t, t_0) + E_p \varepsilon_{sh}(t, t_0) - \Delta \overline{\sigma}_{pr} \right)}{\left( 1 + \frac{E_p A_p}{E_c(t_0) A_c} (1 + \chi(t, t_0) \phi(t, t_0)) \right)} A_p$$

# Pérdidas diferidas

## Tratamiento normativo pretensado adherente (5.10.6):



$$\Delta P_{c+s+r}(t, t_0) = \Delta P_{dif} = \frac{\left( \frac{E_p}{E_{cm}(t_0)} \sigma_{cp}(t_0) \varphi(t, t_0) + E_p \varepsilon_{sh}(t, t_0) - 0.8 \times \Delta \sigma_{pr} \right)}{\left( 1 + \frac{E_p A_p}{E_{cm}(t_0) A_c} \left( 1 + \frac{A_c}{I_c} e_p^2 \right) (1 + 0.8 \times \varphi(t, t_0)) \right)} A_p$$

La fórmula considera  $t = \infty$

$\sigma_{cp}(t_0)$ : debida a las acciones cuasi-permanentes

# Pérdidas diferidas

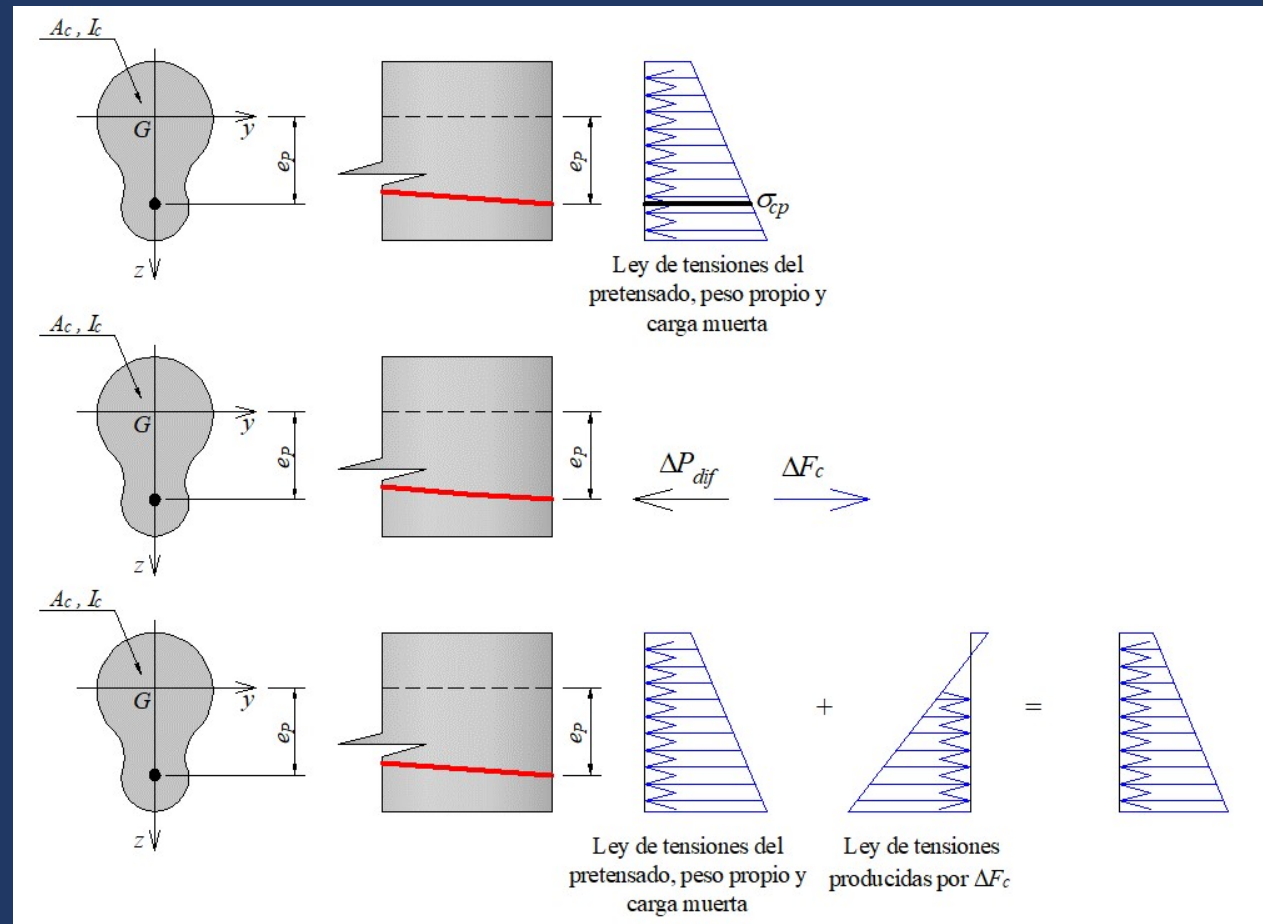
## Tratamiento normativo pretensado adherente:

### NOTA IMPORTANTE:

Para piezas compuestas por varios hormigones construidas por fases, por ejemplo elementos prefabricados y losas de hormigón vertido in situ o procedimientos constructivos complejos, deberá tenerse en cuenta la evolución de la sección resistente, las propiedades de los materiales en el tiempo, la historia de cargas y el cambio de esquema estructural, según sea el caso.

# Pérdidas diferidas

## Tratamiento normativo pretensado adherente:



$$\text{Ley de tensiones producidas por } \Delta F_c = \frac{\Delta P_{dif}}{A_c} + \frac{\Delta P_{dif}}{I_c} e_p z$$



# Pérdidas diferidas

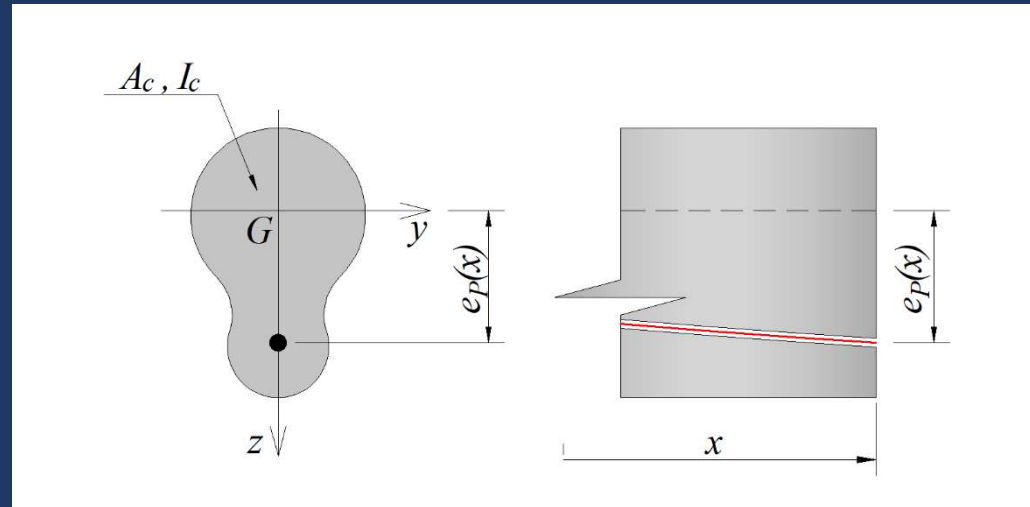
## Ecuación para obtener las pérdidas de pretensado: no adherente

### Hipótesis:

- Las tensiones de compresión no superan  $0.45 f_{cm}$
- El hormigón no está fisurado
- Comportamiento elástico lineal de los materiales (acero y hormigón)
- Es válida la hipótesis de Navier-Bernoulli.
- **Perfecta NO adherencia entre el acero de pretensado y el hormigón**
- Se desprecia la armadura pasiva.
- Vigas isostáticas
- La viga tiene la misma sección en toda su longitud
- La carga muerta se aplica al momento de tensado

# Pérdidas diferidas

## Pérdidas en vigas con pretensado NO adherente:

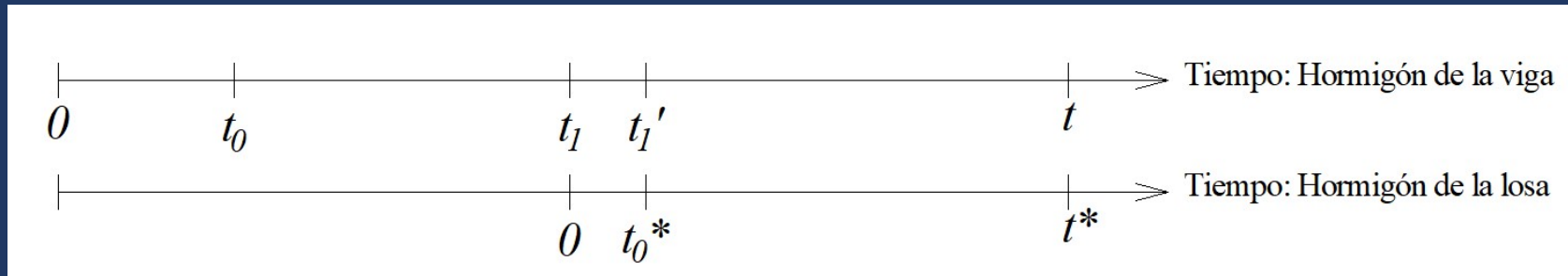


$$\Delta P_{c+s+r}(t, t_0) = \frac{\frac{1}{l} \frac{\varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} \int_{x=0}^{x=l} \sigma_{cp0}(x) dx + \varepsilon_{sh}(t, t_0) - \frac{0.8 \times \Delta \sigma_{pr}}{E_p}}{\frac{1}{E_p A_p} + \frac{(1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0))}{l E_c(t_0)} \int_{x=0}^{x=l} \left( \frac{1}{A_c} + \frac{e_p(x)^2}{I_c} \right) dx}$$

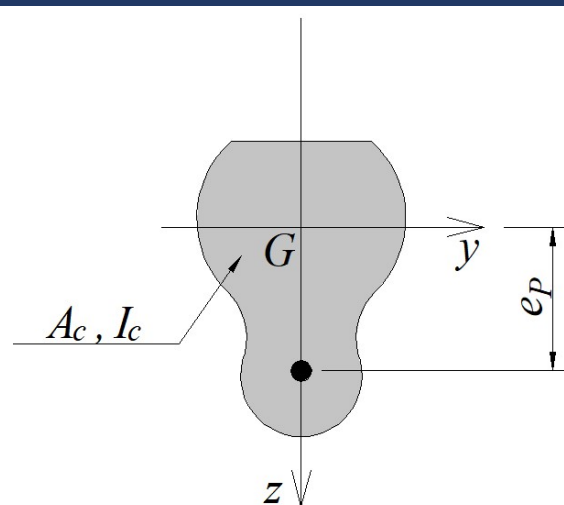
# Pérdidas diferidas

## Pérdidas en vigas con pretensado adherente en vigas compuestas:

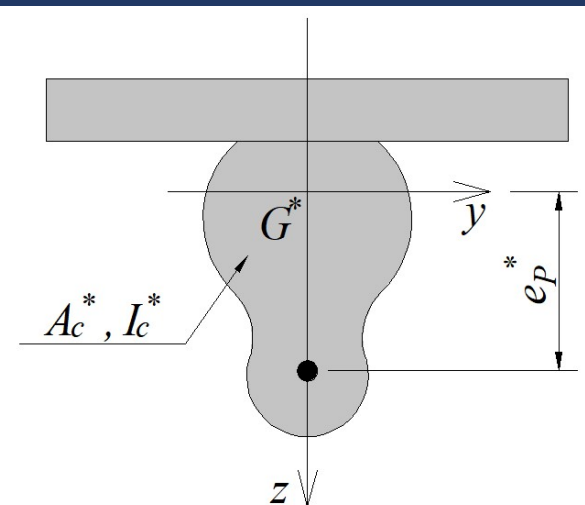
Escala temporal de un procedimiento de construcción:



Sección en  $t < t_1$ :



Sección en  $t \geq t_1$ :



# Pérdidas diferidas

## Pérdidas en vigas con pretensado adherente en vigas compuestas:

Fórmula **simplificada** obtenida bajo las siguientes hipótesis:

- Las tensiones de compresión no superan  $0.45 f_{cm}$
- El hormigón no está fisurado
- Comportamiento elástico lineal de los materiales (acero y hormigón)
- Es válida la hipótesis de Navier-Bernoulli.
- Adherencia perfecta entre el acero de pretensado y el hormigón
- Se desprecia la armadura pasiva
- Vigas isostáticas
- El incremento de tensión entre  $t_0$  y  $t_1$  se aplica en  $t_0$
- El peso de la losa se aplica a la viga en  $t_1$
- La acción compuesta comienza en  $t_1'$  (se desprecian los primeros días de ganancia de resistencia)
- Se desprecia la retracción diferencial entre  $t_1$  y  $t_1'$
- La retracción de la losa comienza en  $t_0^*$
- A los efectos de la estimación de los parámetros de cálculo  $t_1 \approx t_1'$
- Se desprecia la rigidez flexional de la losa
- Cualquier otra carga muerta diferente del peso de la losa se aplica a la sección compuesta en  $t_1$

# Pérdidas diferidas

## Pérdidas en vigas con pretensado adherente en vigas compuestas:

$$\sigma_{cp}^{(1)} = -\frac{(P_0 + \Delta P_{dif}(t_1, t_0))}{A_{c,G}} - \frac{(P_0 + \Delta P_{dif}(t_1, t_0))}{I_{c,G}} e_p^2 + \frac{M_{p,G}}{I_{c,G}} e_p$$

$$\sigma_{cp}^{(2)} = \frac{M_{p,D}}{I_{c,G}} e_p$$

$$\sigma_{cp}^{(3)} = \frac{M_{CM}}{I_c^*} e_p^*$$

$$A_c^*, I_c^*: \text{propiedades de la sección transformada con } n^* = \frac{E_{c,D}(t_0^*)}{E_{c,G}(t_1)}$$

# Pérdidas diferidas

## Pérdidas en vigas con pretensado adherente en vigas compuestas:

$$\Delta P_{dif}(t, t_1) = \left[ \Delta\sigma_p^{(1)} + \Delta\sigma_p^{(2)} + \Delta\sigma_p^{(3)} + \Delta\sigma_p^{(4)} \right] K_{CA}^{(1)} A_p$$

$$\Delta\sigma_p^{(1)} = \left[ \frac{\sigma_{cp}^{(1)}}{E_{c,G}(t_0)} (\varphi_G(t, t_0) - \varphi_G(t_1, t_0)) + \frac{(\sigma_{cp}^{(2)} + \sigma_{cp}^{(3)})}{E_{c,G}(t_1)} \varphi_G(t, t_1) \right] E_p$$

$$\Delta\sigma_p^{(2)} = E_p [\varepsilon_{sh,G}(t, t_0) - \varepsilon_{sh,G}(t_1, t_0)]$$

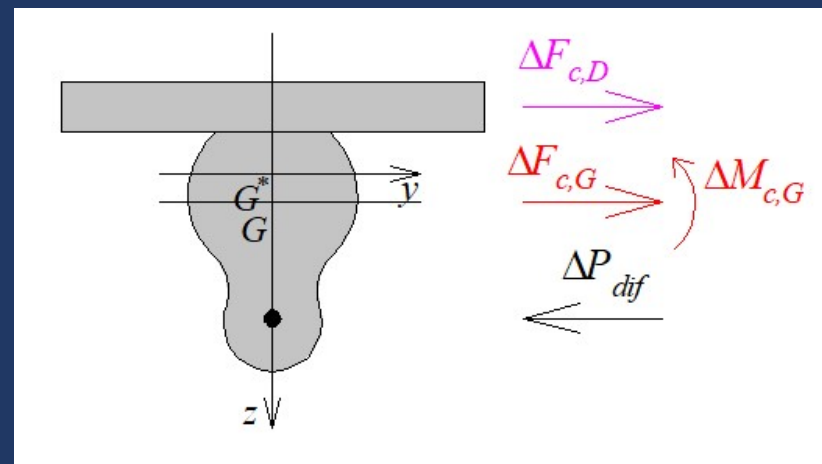
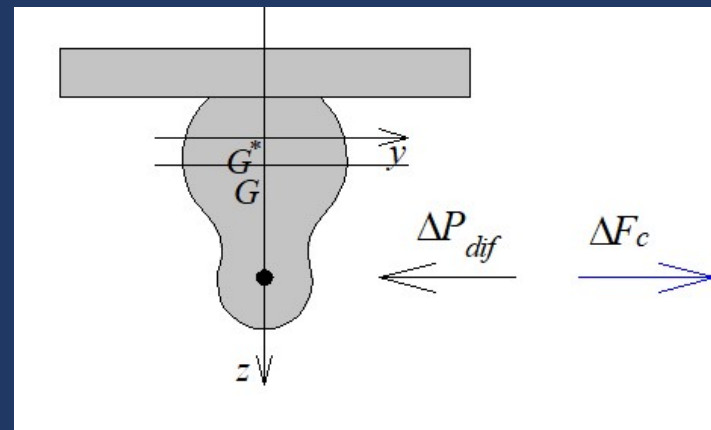
$$\Delta\sigma_p^{(3)} = -\frac{E_p}{E_{c,G}(t_1)} \frac{\varepsilon_{sh,D}(t^*, t_0^*)}{(1+0.8\varphi_D(t^*, t_0^*))} A_{c,D} E_{c,D}(t_0^*) \left( \frac{1}{A_c^*} + \frac{e_p^* e_D^*}{I_c^*} \right) (1+0.8\varphi_G(t, t_1))$$

$$\Delta\sigma_p^{(4)} = -0.8\Delta\sigma_{pr}(t, t_1)$$

$$K_{CA}^{(1)} = \frac{1}{1 + \frac{E_p A_p}{E_{c,G}(t_1) A_c^*} \left( 1 + \frac{A_c^*}{I_c^*} e_p^{*2} \right) (1+0.8\varphi_G(t, t_1))}$$

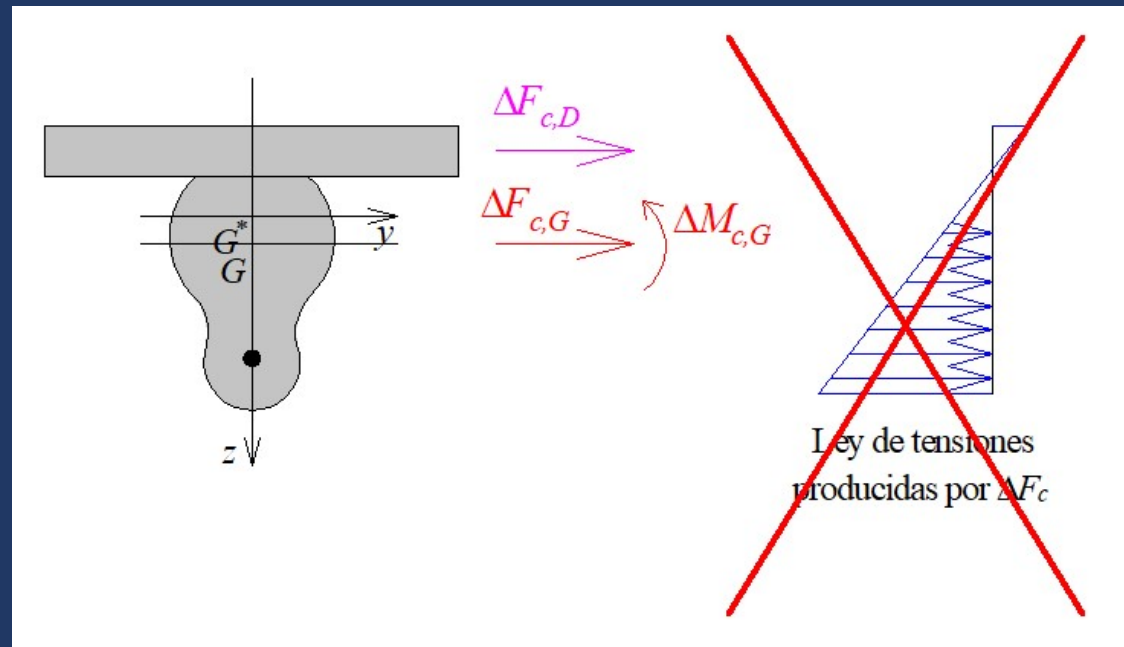
# Pérdidas diferidas

## Pérdidas en vigas con pretensado adherente en vigas compuestas:



# Pérdidas diferidas

## Pérdidas en vigas con pretensado adherente en vigas compuestas:





# Pérdidas diferidas

## Ejercicio 1:

La sección de la Figura 1 corresponde a una viga pretensada cuya longitud de vano es de 30 metros. La armadura pasiva inferior y la superior tienen una sección de  $1256 \text{ mm}^2$  ( $A_{s1} = A_{s2} = 1256 \text{ mm}^2$ ). El acero de pretensado está constituido por 22 cables Y 1860 S 7 de  $150 \text{ mm}^2$  de sección cuyo baricentro se ubica de acuerdo a la Figura. La tensión de pretensado **luego de anclado** cada cable es  $\sigma_{p0} = 1300 \text{ MPa}$ . El hormigón es vertido **inmediatamente después** de tesados los cables. La resistencia característica del hormigón es  $f_{ck} = 40 \text{ MPa}$ .

La viga es curada mediante curado húmedo durante los primeros 7 días luego de vertido el hormigón, momento en el cual es transferido el pretensado, esto es  $t_0 = 7$  días y  $t_s = 7$  días.

Se desea obtener la pérdida de pretensado en la **sección central de la viga** a tiempo  $t_1 = 60$  días y a tiempo  $t_f = 10000$  días sabiendo que la humedad relativa (HR) es de 70%, cemento de endurecimiento normal, temperatura ambiente promedio  $20^\circ\text{C}$ .

La única acción exterior es el peso propio.

# Pérdidas diferidas

## Ejercicio 1:

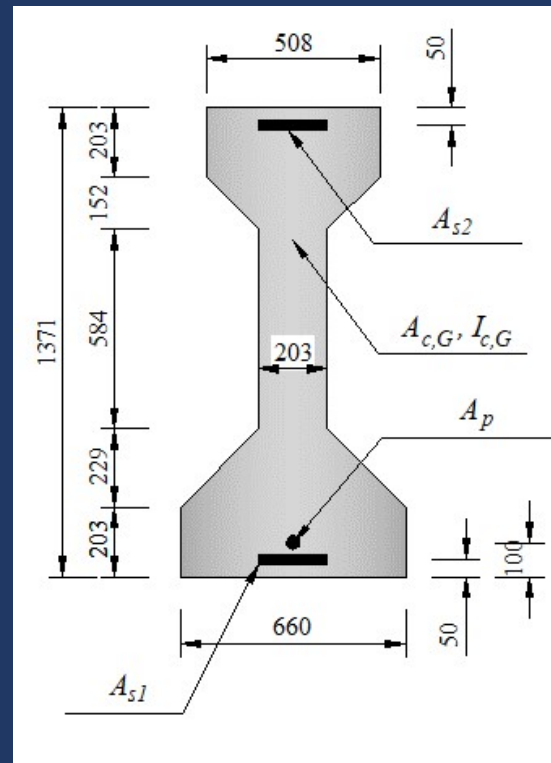


Figura 1. Sección central de la viga. Medidas en [mm].

# Pérdidas diferidas

## Ejercicio 2:

A la viga de la Figura 1 se la hace compuesta mediante una losa hormigonada en sitio de dimensiones  $2300 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ , en la que se coloca una armadura pasiva cuya sección total es de  $4000 \text{ mm}^2$  ( $A_{s3} = 4000 \text{ mm}^2$ ), Figura 2. El hormigón de la losa tiene una resistencia característica de  $f_{ck} = 25 \text{ Mpa}$ , es curada mediante curado húmedo durante los primeros 3 días luego de vertido el hormigón, momento en el cual podemos admitir el trabajo conjunto de ambos hormigones.

Suponer que previo al inicio del trabajo conjunto entre ambos hormigones, es agregada una carga muerta de  $5.75 \text{ kN/m}$ .

Se desea obtener la pérdida de pretensado en la **sección central de la viga** a tiempo  $t_f = 10000$  días. Admitir que las condiciones ambientales no cambian.

# Pérdidas diferidas

## Ejercicio 2:

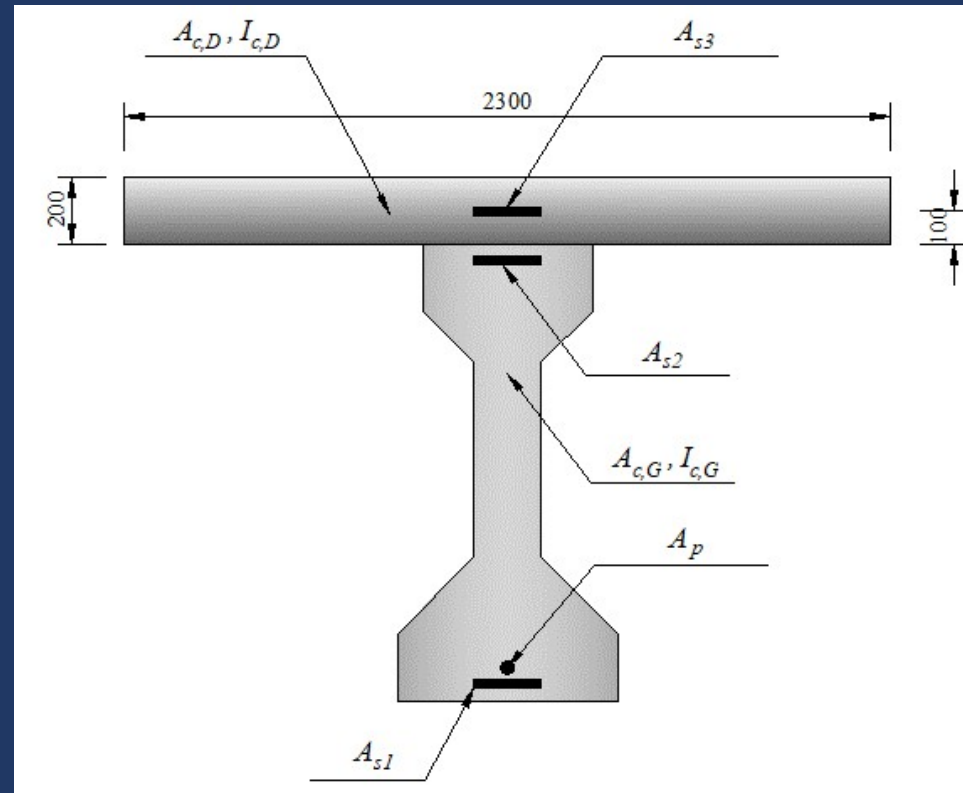


Figura 2. Sección central de la viga-compuesta. Medidas en [mm].

# Ejemplo: pérdidas instantáneas

## Letra

La sección de la Figura 3 corresponde a un corte transversal de un puente peatonal de 18.0 metros de longitud medidos entre eje de apoyos de las vigas (se puede asumir un comportamiento como viga simplemente apoyada). La sección transversal está formada por tres (3) vigas prefabricas postensadas cuya sección se muestra en la Figura 4.

Las sobrecargas de uso verticales han sido calculadas y están dadas en la Tabla 1. Como superficie de tránsito se colocará una carpeta asfáltica. Además se considera que el peso de la baranda y las luminarias es del orden de 0.75 kN/m.

El hormigón de la viga será C 35/45 ( $f_{ck} = 35$  MPa) y se utilizará cemento de endurecimiento normal. La viga será curada mediante curado húmedo durante los primeros 7 días luego de vertido el hormigón y el pretensado se aplicará a los 15 días del vertido, esto es  $t_0 = 15$  días y  $t_s = 7$  días.

El acero de pretensado estará constituido por cables Y 1860 S7.

Se estima que la humedad relativa promedio (HR) durante la vida útil de la estructura será del orden del 70% y la temperatura ambiente promedio del orden de 20°C.

Las cargas muertas (excluido el peso propio) se agregan a los 60 días.

El objetivo de este ejercicio es dimensionar la viga N°1 (la viga izquierda).

# Ejemplo: pérdidas instantáneas

## Letra

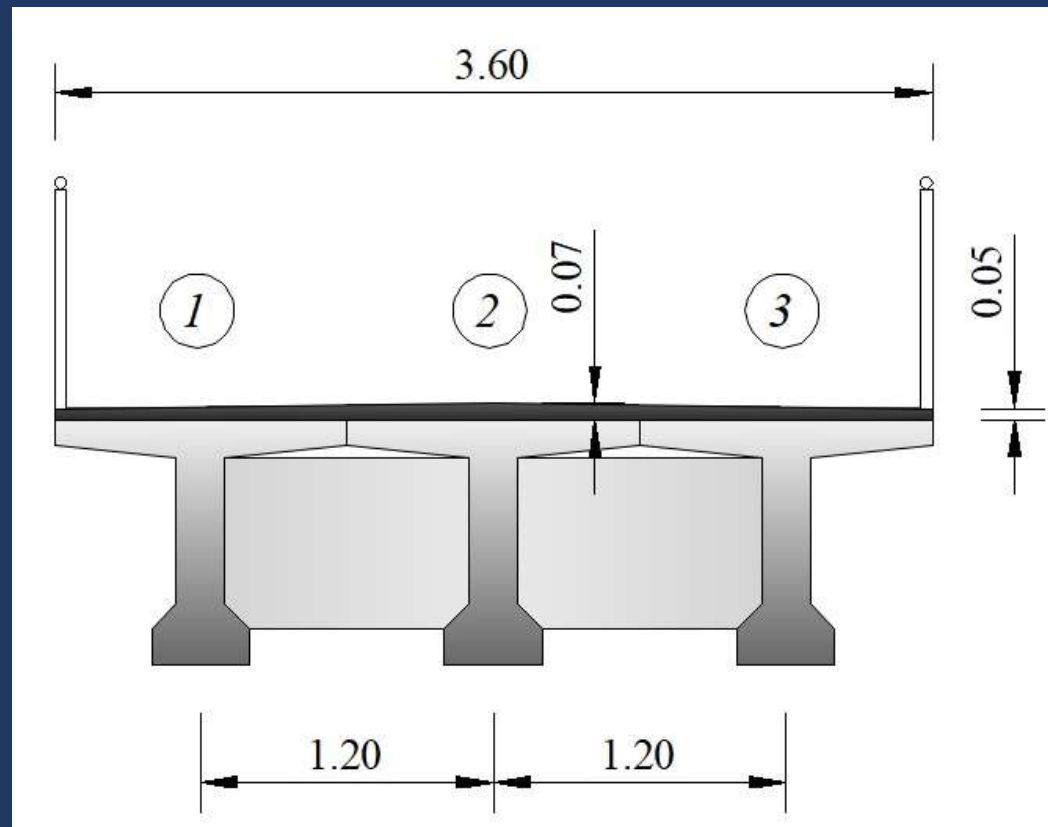


Figura 3. Sección transversal del puente peatonal. Medidas en [m].

# Ejemplo: pérdidas instantáneas

## Letra

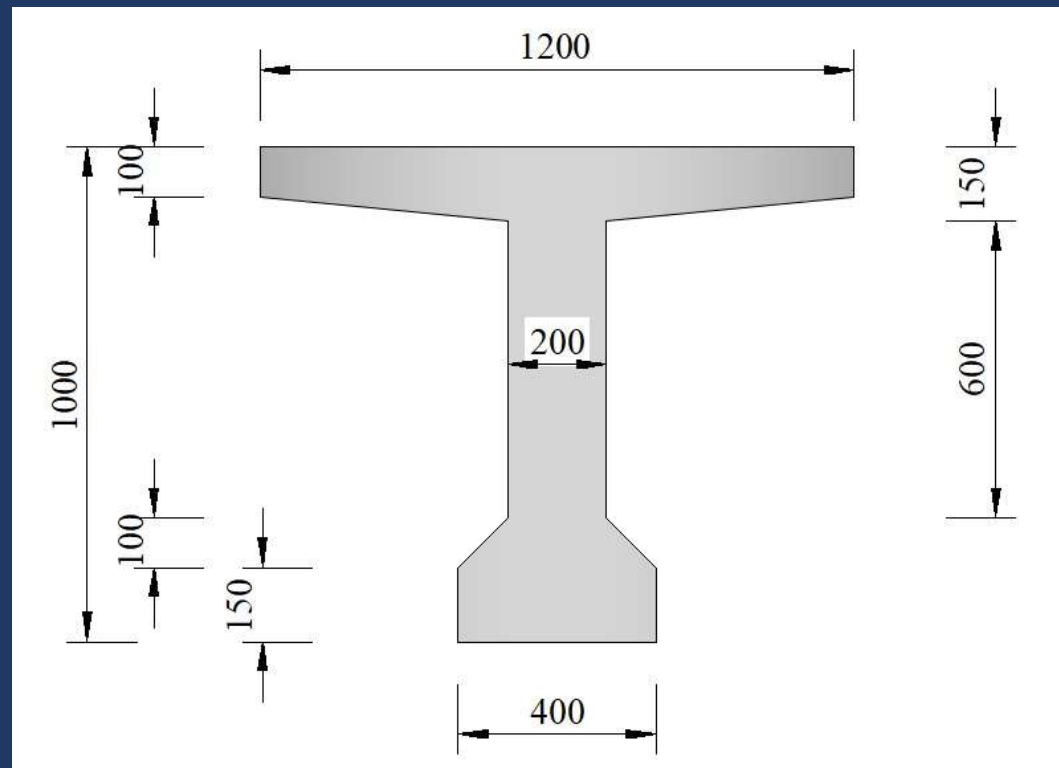


Figura 4. Sección de la viga prefabricada. Medidas en [mm].

# Ejemplo: pérdidas instantáneas

## Letra

**Valores de las solicitaciones en ELU (envolventes)**

Li [m]	0.00	0.90	1.80	2.70	3.60	4.50	5.40	6.30	7.20	8.10	9.00
Momento positivo [kNm]	0	73	139	196	246	289	323	350	369	381	385
Momento negativo [kNm]	0	-11	-21	-29	-37	-43	-48	-52	-55	-57	-58
Cortante [kN]	85	77	69	62	55	48	42	36	31	26	21

**Valores de las solicitaciones en la situación Frecuente (envolventes)**

Li [m]	0.00	0.90	1.80	2.70	3.60	4.50	5.40	6.30	7.20	8.10	9.00
Momento positivo [kNm]	0	22	41	58	73	85	96	104	109	113	114
Momento negativo [kNm]	0	-3	-6	-9	-11	-13	-14	-16	-16	-17	-17
Cortante [kN]	25	23	21	18	16	14	12	11	9	8	6

**Valores de las solicitaciones en la combinación poco probable o característica (envolventes)**

Li [m]	0.00	0.90	1.80	2.70	3.60	4.50	5.40	6.30	7.20	8.10	9.00
Momento positivo [kNm]	0	54	103	145	182	214	239	259	274	282	285
Momento negativo [kNm]	0	-8	-15	-22	-27	-32	-36	-39	-41	-42	-43
Cortante [kN]	63	57	51	46	41	36	31	27	23	19	16

**Valores del momento flector, para la combinación frecuente de acciones, que genera la máxima flecha en L/2= 9.00 metros**

Li [m]	0.00	0.90	1.80	2.70	3.60	4.50	5.40	6.30	7.20	8.10	9.00
Momento positivo [kNm]	0	22	41	58	73	85	96	104	109	113	114

Tabla 1. Sobrecargas verticales.



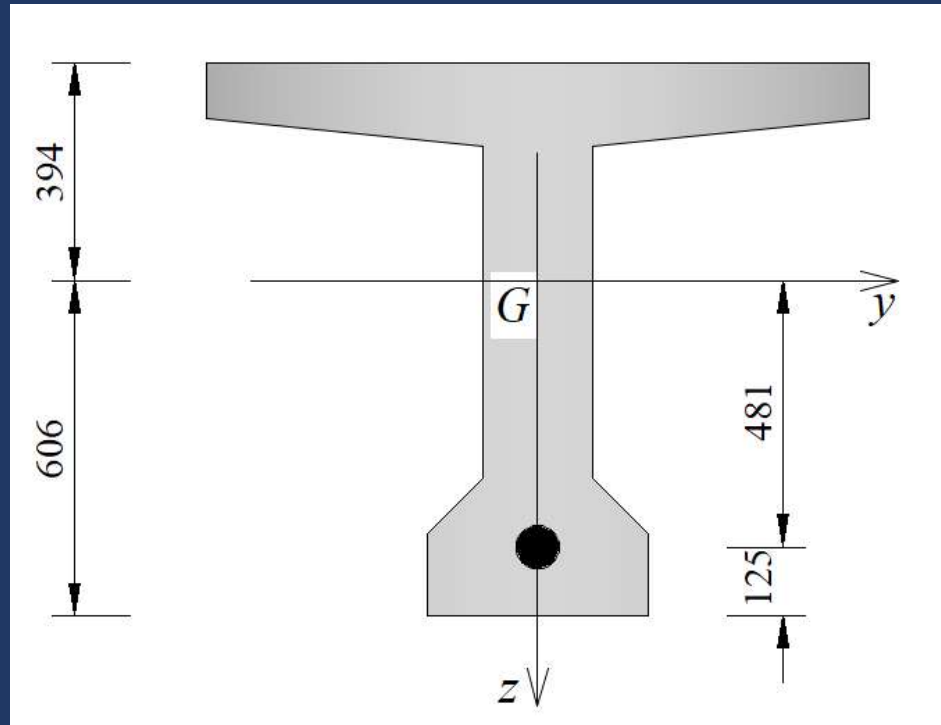
# Ejemplo: pérdidas instantáneas

## Resolución

Cordones	Norma	Grado $f_{pk}$	Diámetro nominal [mm]	Sección nominal [mm <sup>2</sup> ]	Masa [g/m]	Carga mínima de rotura $F_{pk}$ [kN]	Relajación en 1000h al 70% de $F_{pk}$	Carga mínima al 0,1% de deformación [kN]
<b>0,6"</b> <b>(15mm)</b>	EN-10138-3	1860 MPa	15,2	140	1095	260	2,50%	224
	ASTM A416M-99	270 ksi	15,24	140	1102	260,7	2,50%	234,6
	BS 5896:1980	1770 MPa	15,7	150	1180	265	2,50%	225
	EN-10138-3	1860 MPa	16	150	1170	279	2,50%	240
<b>0,5"</b> <b>(13mm)</b>	ASTM A416M-99	270 ksi	12,7	98,71	775	183,7	2,50%	165,3
	BS 5896:1980	1860 MPa	12,9	100	785	186	2,50%	158
	EN-10138-3	1860 MPa	13	100	781	186	2,50%	160

# Ejemplo: pérdidas instantáneas

## Resolución



$$A_c = 3.650 \times 10^5 \text{ mm}^2$$

$$I_c = 4.306 \times 10^{10} \text{ mm}^4$$

$$f_{ctm,fl,j=1} \text{ días} = 2.93 \text{ MPa}$$

$$f_{ctm,fl} = 3.21 \text{ MPa}$$

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa}$$

# Ejemplo: pérdidas instantáneas

## Resolución – estimación de la fuerza de pretensado

En el corto plazo,  $t=t_0$  ( $P_1 = 0.9 \cdot P_0$ ):

$$\sigma_{c0,inf} = 1.1 \cdot 0.9 \cdot P_0 \left( -\frac{1}{A_c} - \frac{e_p}{I_c} z_i \right) + \frac{M_{pp}}{I_c} z_i \geq -0.6 f_{ck,j} \quad (1)$$

$$\sigma_{c0,inf} = 0.9 \cdot 0.9 \cdot P_0 \left( -\frac{1}{A_c} - \frac{e_p}{I_c} z_i \right) + \frac{M_{pp}}{I_c} z_i \geq -0.6 f_{ck,j} \quad (2)$$

$$\sigma_{c0,sup} = 1.1 \cdot 0.9 \cdot P_0 \left( -\frac{1}{A_c} - \frac{e_p}{I_c} z_s \right) + \frac{M_{pp}}{I_c} z_s \leq f_{ctm,fl,j} \quad (3)$$

$$\sigma_{c0,sup} = 0.9 \cdot 0.9 \cdot P_0 \left( -\frac{1}{A_c} - \frac{e_p}{I_c} z_s \right) + \frac{M_{pp}}{I_c} z_s \leq f_{ctm,fl,j} \quad (4)$$

En el largo plazo,  $t > 10000$  días ( $P_2 = 0.75 \cdot P_0$ ):

$$\sigma_{c,inf} = 1.1 \cdot 0.75 \cdot P_0 \left( -\frac{1}{A_c} - \frac{e_p}{I_c} z_i \right) + \frac{M_{pp} + M_{CM}}{I_c} z_i + \frac{M_{Q,fref}}{I_c} z_i \leq f_{ctm,fl} \quad (5)$$

$$\sigma_{c,inf} = 0.9 \cdot 0.75 \cdot P_0 \left( -\frac{1}{A_c} - \frac{e_p}{I_c} z_i \right) + \frac{M_{pp} + M_{CM}}{I_c} z_i + \frac{M_{Q,fref}}{I_c} z_i \leq f_{ctm,fl} \quad (6)$$

$$\sigma_{c,sup} = 1.1 \cdot 0.75 \cdot P_0 \left( -\frac{1}{A_c} - \frac{e_p}{I_c} z_s \right) + \frac{M_{pp} + M_{CM}}{I_c} z_s + \frac{M_{Q,caract}}{I_c} z_s \geq -0.6 f_{ck} \quad (7)$$

$$\sigma_{c,sup} = 0.9 \cdot 0.75 \cdot P_0 \left( -\frac{1}{A_c} - \frac{e_p}{I_c} z_s \right) + \frac{M_{pp} + M_{CM}}{I_c} z_s + \frac{M_{Q,caract}}{I_c} z_s \geq -0.6 f_{ck} \quad (8)$$

# Ejemplo: pérdidas instantáneas

## Resolución – estimación de la fuerza de pretensado

$$M_{pp} = 3.70 \times 10^8 \text{ Nmm}$$

$$M_{CM} = 1.03 \times 10^8 \text{ Nmm (carpeta + 0.75 kN/m debido al peso de la baranda y luminarias)}$$

$$M_{Q,frec} = 1.14 \times 10^8 \text{ Nmm}$$

$$M_{Q,caract} = 2.85 \times 10^8 \text{ Nmm}$$

Luego:

$$(1) P_0 \leq 2.529 \times 10^6 \text{ N}$$

$$(2) P_0 \leq 3.090 \times 10^6 \text{ N}$$

$$(3) P_0 \leq 3.837 \times 10^6 \text{ N}$$

$$(4) P_0 \leq 4.690 \times 10^6 \text{ N}$$

$$(5) P_0 \geq 6.436 \times 10^5 \text{ N}$$

$$(6) P_0 \geq 7.866 \times 10^5 \text{ N}$$

$$(7) P_0 \geq -1.026 \times 10^7 \text{ N}$$

$$(8) P_0 \geq -1.254 \times 10^7 \text{ N}$$

$$P_0 \in [7.866 \times 10^5 \text{ N}; 2.529 \times 10^6 \text{ N}]$$

# Ejemplo: pérdidas instantáneas

CORDON 0,6"													
Tendón		Cordón Ø16 mm. Y 1860 S7 según EN-10138-3				Cordón Ø15,24 mm. Grade 270 según ASTM A416M-99				Vaina Ø mm interior	Cemento kg/ml	Gato	
Tipo	Nº cordones	Carga de rotura $F_{pk}$ [kN]	Fuerza de tesado (1) $P_0$ [kN]	Masa [kg/m]	Sección [mm <sup>2</sup> ]	Carga de rotura $F_{pk}$ [kN]	Fuerza de tesado (2) $P_0$ [kN]	Masa [kg/m]	Sección [mm <sup>2</sup> ]				
<b>1-0,6"</b>	1	279	204	1,17	150	260,7	195,5	1,102	140	-	-	ARROW	
<b>4-0,6"</b>	2	558	408	2,34	300	521	391	2,20	280	51	2,6	MS-1	
	3	837	612	3,51	450	782	586	3,31	420				2,4
	4	1.116	816	4,68	600	1.042	782	4,41	560	51	2,0	MS-2	
<b>5-0,6"</b>	5	1.395	1.020	5,85	750	1.303	977	5,51	700				62
<b>7-0,6"</b>	6	1.674	1.224	7,02	900	1.564	1.173	6,61	840	72	4,3		
	7	1.953	1.428	8,19	1.050	1.824	1.368	7,71	980			85	6,0
<b>9-0,6"</b>	8	2.232	1.632	9,36	1.200	2.085	1.564	8,82	1.120	90	6,6		
	9	2.511	1.836	10,53	1.350	2.346	1.759	9,92	1.260			90	6,4
<b>12-0,6"</b>	10	2.790	2.040	11,70	1.500	2.607	1.955	11,02	1.400	100	8,2		
	11	3.069	2.244	12,87	1.650	2.867	2.150	12,12	1.540			8,0	
	12	3.348	2.448	14,04	1.800	3.128	2.346	13,22	1.680				7,8
<b>15-0,6"</b>	13	3.627	2.652	15,21	1.950	3.389	2.541	14,33	1.820	7,6	53		
	14	3.906	2.856	16,38	2.100	3.649	2.737	15,43	1.960				
	15	4.185	3.060	17,55	2.250	3.910	2.932	16,53	2.100				
<b>19-0,6"</b>	16	4.464	3.264	18,72	2.400	4.171	3.128	17,63	2.240	100	8,2	MS-4	
	17	4.743	3.468	19,89	2.550	4.431	3.323	18,73	2.380				
	18	5.022	3.672	21,06	2.700	4.692	3.519	19,84	2.520				
	19	5.301	3.876	22,23	2.850	4.953	3.714	20,94	2.660				

# Ejemplo: pérdidas instantáneas

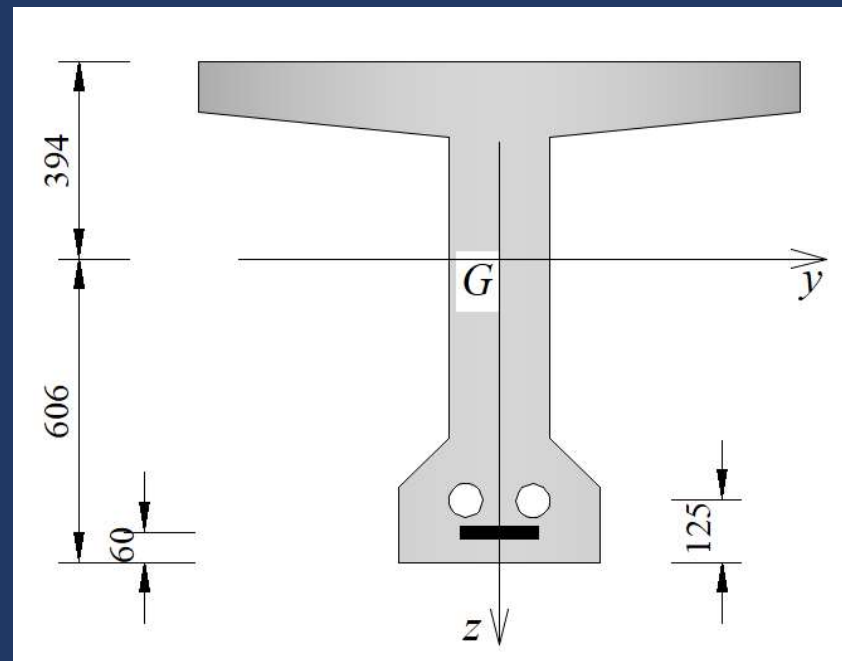
## Resolución

Elijo utilizar 12 cordones de 16 mm de diámetro nominal en dos vainas de 6 cordones cada una.

Según MK4: 6-06" (16 mm).

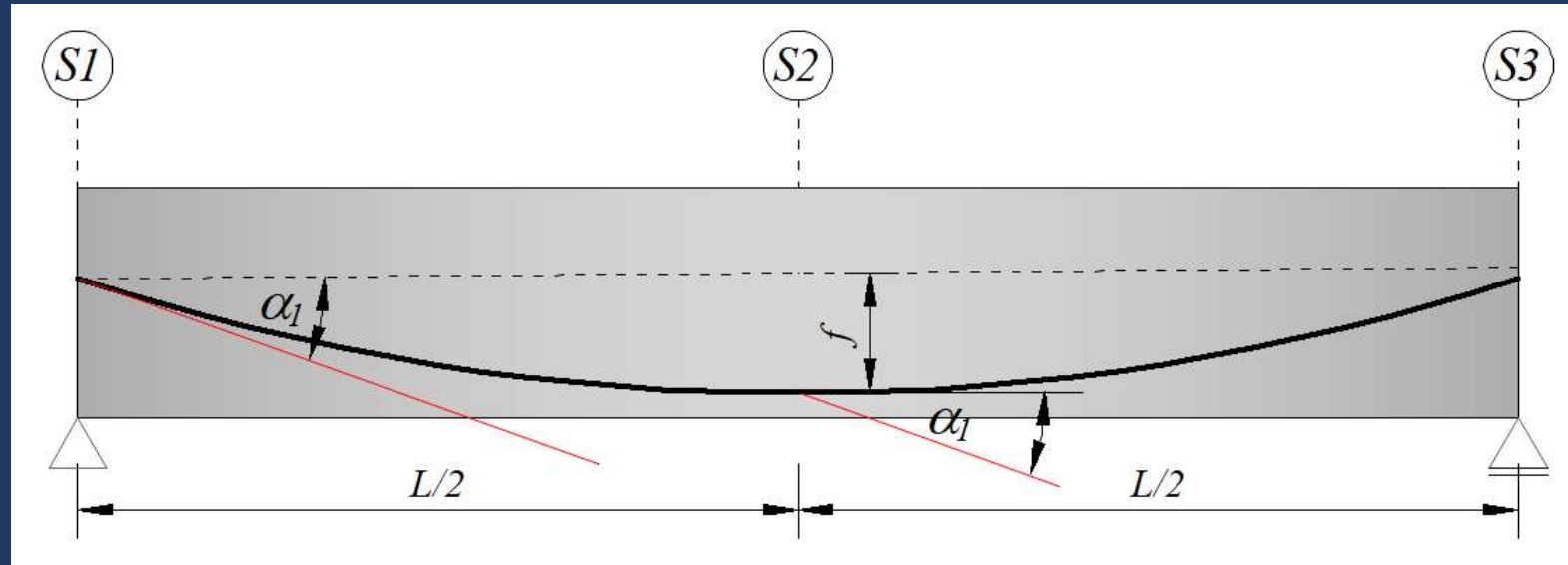
La fuerza de tensado es de 1224 kN luego  $P_{m\acute{a}x} = 2448$  kN.

El diámetro exterior de cada vaina es de 67 mm.



# Ejemplo: pérdidas instantáneas

## Resolución: pérdidas por rozamiento



# Ejemplo: pérdidas instantáneas

## Resolución: pérdidas por rozamiento

$$\alpha_1 = \text{atan} \left( \frac{4f}{L} \right) = \text{atan} \left( \frac{4 \times 481}{18000} \right) = 0.1065 \text{ rad}$$

Evalúo el término del exponente en la ecuación de las pérdidas por rozamiento:

$$\text{MK4: } \mu = 0.22 \text{ y } k \cdot \mu = 2.5 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

$$\mu\alpha_1 + k\mu \frac{L}{2} = 0.22 \times 0.1065 + 2.5 \times 10^{-6} \times 9000 = 0.0459 \leq 0.3$$

La pérdida por rozamiento entre las secciones (1) y (2) es:

$$\Delta P_{\mu,1-2} = P_{\text{máx}} \left( \mu\alpha \left( \frac{L}{2} \right) + k\mu \frac{L}{2} \right) = 2.448 \times 10^6 \times 0.0459 = 1.124 \times 10^5 \text{ N}$$

La pérdida por rozamiento entre las secciones (1) y (3) es:

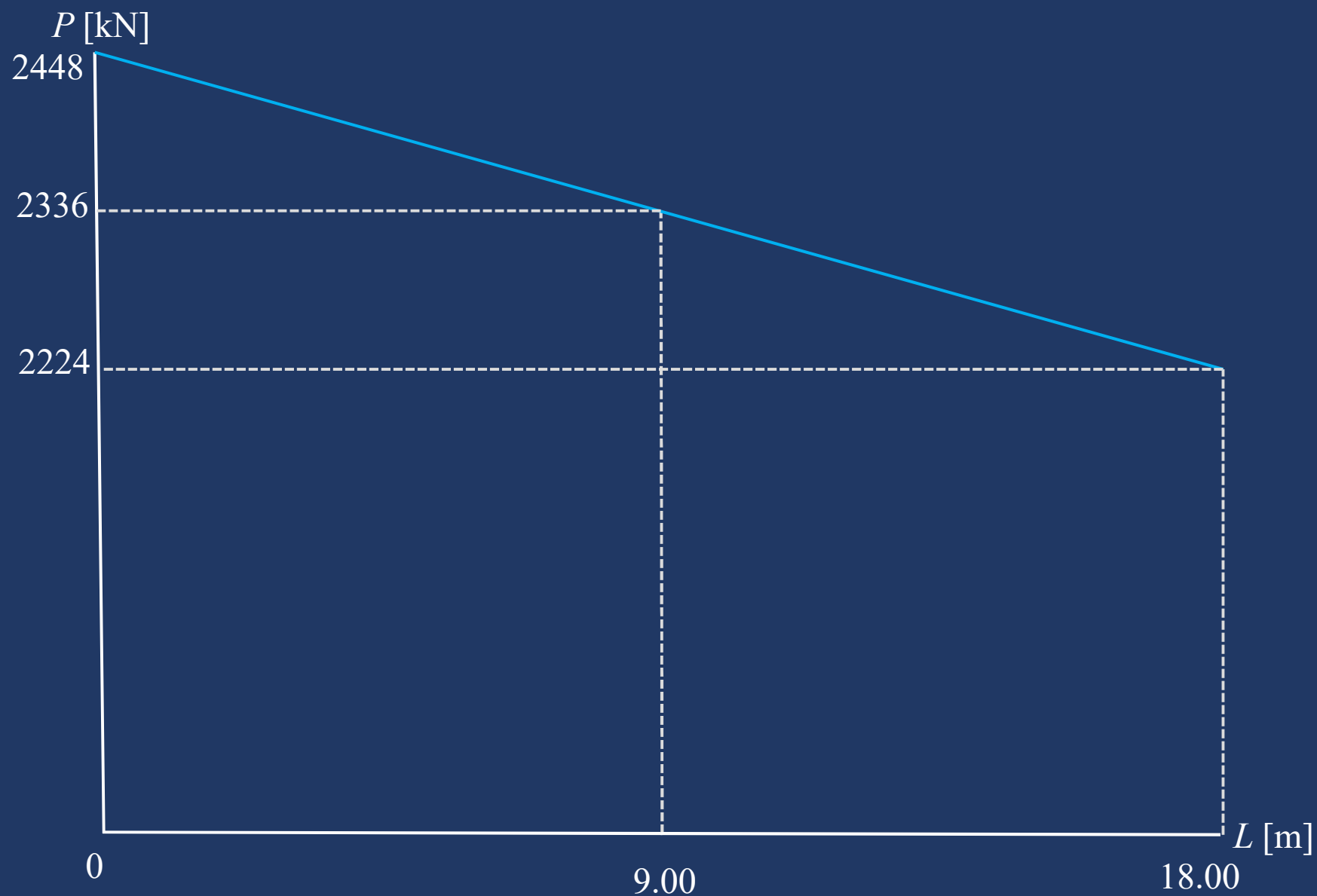
$$\Delta P_{\mu,1-3} = 2 \times \Delta P_{\mu,1-2} = 2.248 \times 10^5 \text{ N}$$

La pérdida en porcentaje por rozamiento entre las secciones (1) y (2) es:

$$\frac{\Delta P_{\mu,1-2}}{P_{\text{máx}}} = 4.59 \%$$



Hormigón Estructural 3



# Ejemplo: pérdidas instantáneas

## Resolución: pérdidas por penetración de cuñas

$$a = 6 \text{ mm}$$

$$E_p = 195 \text{ GPa}$$

$$l_x = L \sqrt{\frac{a \times E_p}{\sigma_{p,máx} \times \mu \times (8f + kL^2)}} = 12972 \text{ mm}$$

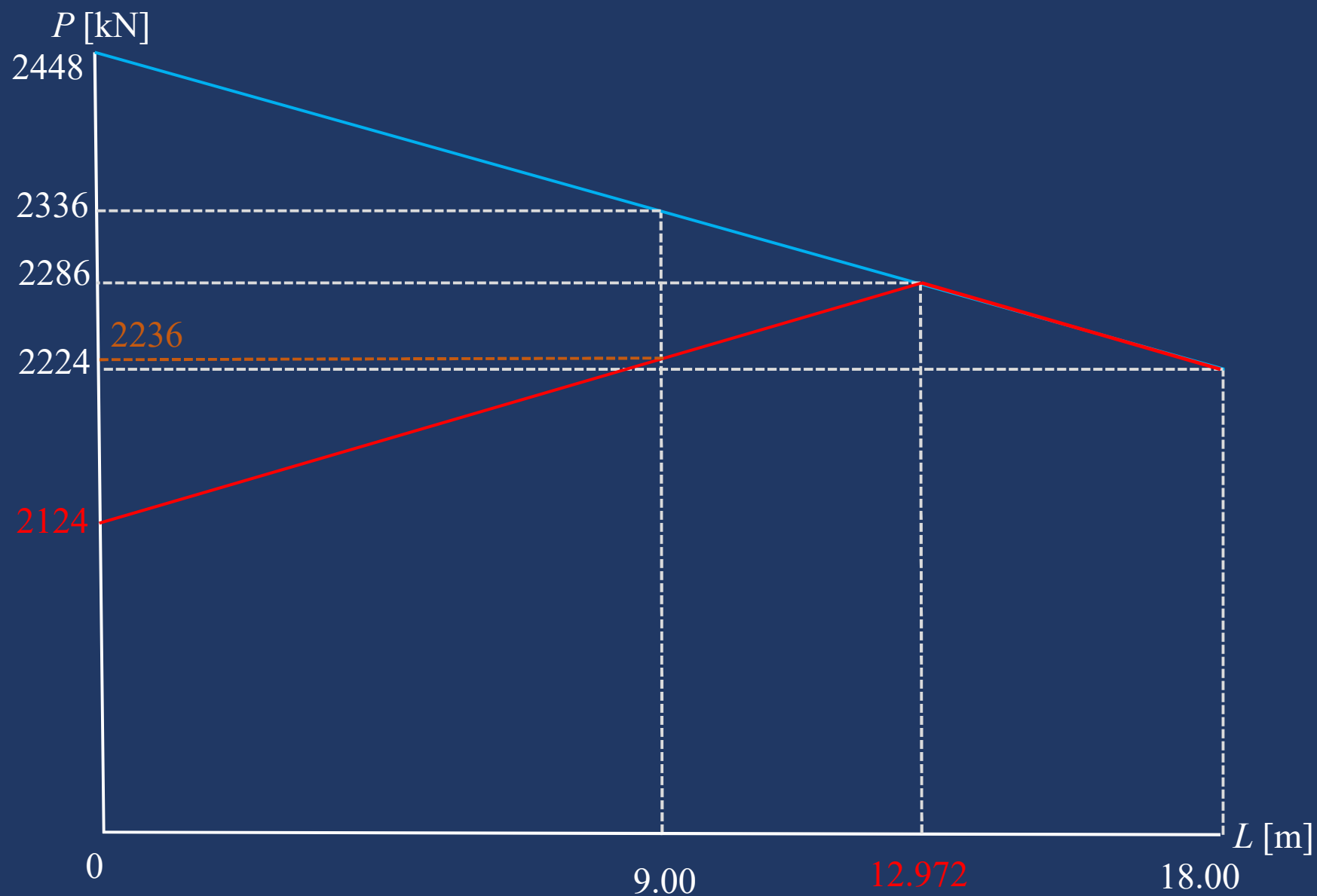
$$\Delta P_{sl} = 3.241 \times 10^5 \text{ N}$$

$$P_2 \left( \frac{L}{2} \right) = 2.236 \times 10^6 \text{ N}$$

La pérdida en porcentaje por penetración de las cuñas en la sección (2) es:

$$\frac{\Delta P_{2,(2)}}{P_{máx}} = 4.05 \%$$

Hormigón Estructural 3



# Ejemplo: pérdidas instantáneas

## Resolución: pérdidas por acortamiento elástico

$$\Delta P_{el} = \frac{(n-1)}{2n} \sigma_{cp} \frac{E_p A_p}{E_{cm}(t)}$$

Sistema multitorón n=2:

$$A_p = 1800 \text{ mm}^2$$

$$E_p = 195 \text{ GPa}$$

$$E_{cm}(15) = 33154 \text{ MPa}$$

Calculo una tensión media a lo largo del cable:

$$\sigma_{cp}(0) = -\frac{2.124 \times 10^6}{3.650 \times 10^5} = -5.82 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{cp}(18000) = -\frac{2.224 \times 10^6}{3.650 \times 10^5} = -6.09 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{cp}(9000) &= -\frac{2.236 \times 10^6}{3.650 \times 10^5} - \frac{2.236 \times 10^6 \times 481^2}{4.306 \times 10^{10}} + \frac{3.70 \times 10^8}{4.306 \times 10^{10}} 481 \\ &= -14.01 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma_{cp,med} = -9.98 \text{ MPa}$$

$$\Delta P_{el,med} = 0.2642 \times 10^5 \text{ N}$$

# Ejemplo: pérdidas instantáneas

## Resolución: pérdidas por acortamiento elástico

$$\frac{\Delta P_{el,med}}{P_{m\acute{a}x}} = 1.08 \%$$

La pérdida instantánea en la sección (2) es de **9.73 %**.

Hormigón Estructural 3



# Ejemplo: pérdidas diferidas

## Resolución: pérdidas diferidas

Aplicamos la fórmula del EC asumiendo que las cargas muertas se aplican en  $t = t_0$ :

$$\varepsilon_{sh}(10000,15) = -383 \times 10^{-6}$$

$$\varphi(10000,15) = 2.01$$

$$\mu_r(2) = 0.660$$

$$\Delta\sigma_{pr}(239640 \text{ hs}) = 33.30 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{cp(2)} &= -\frac{2.210 \times 10^6}{3.650 \times 10^5} - \frac{2.210 \times 10^6 \times 481^2}{4.306 \times 10^{10}} + \frac{(3.70 \times 10^8 + 1.03 \times 10^8)}{4.306 \times 10^{10}} 481 \\ &= -12.64 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\Delta P_{dif} = -3.688 \times 10^5 \text{ N}$$

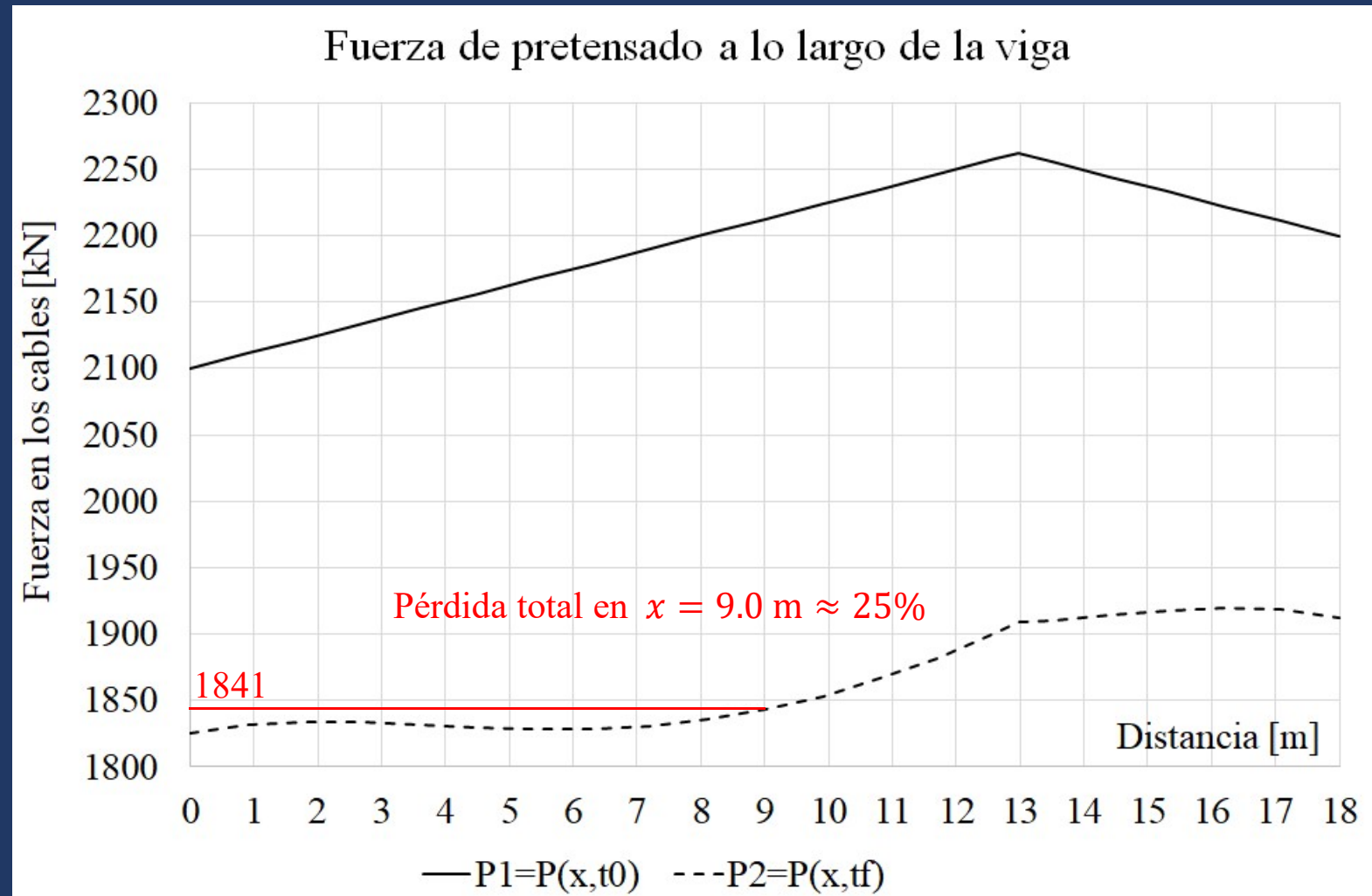
$$\left| \frac{\Delta P_{dif}}{P_{m\acute{a}x}} \right| = 15.07 \%$$

La pérdida total en la sección (2) es de **24.79 %**.

**NOTA:** Si a los efectos de definir la vida útil de la pasarela peatonal la clasificamos como un *punte* (UNE-EN 1990), su vida útil sería de 100 años. En este caso la pérdida diferida en la sección (2) es de **16.47 %**.

# Pérdidas diferidas

## Resolución: pérdidas diferidas





# Ejemplo: pérdidas diferidas

## Resolución: pérdidas diferidas

Si las cargas muertas se aplican a 60 días, aplicamos el principio de superposición (viscoelasticidad). Dado que este tema queda fuera del alcance del curso simplemente mencionar que, como el cálculo del coeficiente de fluencia sigue el modelo del MC 2010, se utilizan expresiones análogas a la de la diapositiva 29. En ese caso:

$$\Delta P_{dif} = -3.696 \times 10^5 \text{ N} \quad \left( \left| \frac{\Delta P_{dif}}{P_{m\acute{a}x}} \right| = 15.10 \% \right)$$

Es oportuno mencionar que si se utilizan expresiones análogas a la de la diapositiva 29 para el caso en que toda la carga de larga duración se aplica a los 15 días, obtenemos:

$$\Delta P_{dif} = -3.653 \times 10^5 \text{ N} \quad \left( \left| \frac{\Delta P_{dif}}{P_{m\acute{a}x}} \right| = 14.92 \% \right)$$

**Conclusiones:** estas diferencias poco significativas están relacionadas en parte con que la carga muerta (excluido el peso propio) es relativamente pequeña en comparación al peso propio más el pretensado. No obstante, la edad de carga inicial también juega un rol importante. ¿Se anima el alumno a explicar cómo?