Subgrupos normales, grupo cociente y el Teorema de Isomorfismo

Dado un grupo finito G y $H < G$, si recordamos la demostración del Teorema de Lagrange, tenemos que

$$o(G) = k \cdot o(H),$$

donde

$k = \#$ clases laterales de la relación $a \equiv b \ (\text{mód } H)$,

donde $a \equiv b \ (\text{mód } H)$ si $a \cdot b^{-1} \in H$.

Entonces,

$$\{Hg \ / \ g \in G\}$$

es un conjunto con k elementos.

Definición: Al valor k se le conoce como índice de G en H., y se denota por

$$k = [G : H]$$

El objetivo de esta parte del curso es responder la siguiente interrogante:

¿Es $\{Hg \ / \ g \in G\}$ un grupo ¿?

A partir de ahora, llamaremos al conjunto anterior

$$G/H$$

Antes de proponer una operación binaria para G/H, hagamos una comparación de conceptos de aritmética y teoría de grupos.

Aritmética	T. de grupos
$\mathbb{Z}$	G
$m\mathbb{Z}$	H
$a \equiv b \pmod{m}$	$a \equiv b \pmod{H}$
$\mathbb{Z}_m$	G/H
$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$	$Ha * Hb = ?$

Si nos motivamos en la estructura del grupo aditivo $(\mathbb{Z}_m, +)$, lo más natural es definir la operación en G/H entre clases laterales Ha y Hb operando a sus representantes a y b, es decir:

$$* : G/H \times G/H \longrightarrow G/H$$

$$(Ha, Hb) \longmapsto H(a \cdot b)$$

la clase lateral de $a \cdot b$.

Hay que verificar que la operación anterior esté bien definida, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} Ha = Ha' \\ \text{y} \\ Hb = Hb' \end{array}\right. \Longrightarrow Ha * Hb = Ha' * Hb'$$

$$(\text{i.e., } H(a \cdot b) = H(a' \cdot b').)$$

$Ha = Ha' \Rightarrow a \equiv a' \pmod{H} \Rightarrow a \cdot (a')^{-1} \in H$

$\Rightarrow a = ha'$, con $h \in H$.

$Hb = Hb' \Rightarrow b = \tilde{h}b'$, con $\tilde{h} \in H$.

Luego,

$Ha * Hb := H(a \cdot b) = H(ha'\tilde{h}b') = H(a'\tilde{h}b')$

↳ ya que $h \in H$.

Y así,

$Ha * Hb = Ha' * Hb' \Leftrightarrow H(a'\tilde{h}b') = H(a' \cdot b')$

$\Leftrightarrow a'\tilde{h}b' \underset{①}{=} \hat{h}a'b'$ para algún $\hat{h} \in H$.

Obs: Si G es abeliano, $\hat{h} = \tilde{h}$ satisface ① ya que

$a'\tilde{h}b' = \tilde{h}a'b'$.

Pero en general, no podemos garantizar que ① se cumple.

Existe un tipo particular de subgrupo que hace que la operación $*$ en G/H esté bien definida.

Definición: Sea $N < G$ y $g \in G$. Se define el conjugado de N por g como el conjunto

$gNg^{-1} := \{ g \cdot x \cdot g^{-1} / x \in N \}$.

Los elementos de gNg^{-1} se denominan <u>elementos conjugados</u>.

N es un <u>subgrupo normal</u> de G, denotado

$$N \trianglelefteq G,$$

si $gNg^{-1} = N$ para todo $g \in G$.

<u>Observaciones</u>:

1) Para cada $g \in G$, gNg^{-1} es un subgrupo de G.

2) $c: N \longrightarrow gNg^{-1}$

$c(x) = gxg^{-1}$ es un homomorfismo, llamado <u>conjugación</u>.

3) Si G es abeliano, entonces todo subgrupo de G es normal.

<u>Ejemplo</u>:

1) $\{e_G\}$ y G son subgrupos normales de G.

2) En S_3, $\{id, \sigma_3\}$, donde $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, no es un subgrupo normal.

En efecto, para $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene

$$\sigma_1 \circ \sigma_3 \circ \sigma_1^{-1} = \sigma_1 \circ \sigma_3 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_2,$$

y $\sigma_2 \notin \{id, \sigma_3\}$.

3) Si $\varphi : G \longrightarrow K$ es um homomonfismo de grupos, entonces $\ker(\varphi) \trianglelefteq G$. Em efecto, para $g \in G$ y $x \in \ker(\varphi)$, se tiene

$$
\begin{aligned}
\varphi(g \cdot x \cdot g^{-1}) &= \varphi(g) \cdot \varphi(x) \cdot [\varphi(g)]^{-1} \\
&= \varphi(g) \cdot e_K \cdot [\varphi(g)]^{-1} \\
&= \varphi(g) \cdot [\varphi(g)]^{-1} \\
&= e_K,
\end{aligned}
$$

de donde $g * x * g^{-1} \in \ker(\varphi)$, es decin,

$$g \ker(\varphi) g^{-1} \subseteq \ker(\varphi).$$

Ahona, sea $x \in \ker(\varphi)$.

$$x = g\,(\underbrace{g^{-1} x\, g}_{\in \ker(\varphi)})\,g^{-1} \in g \ker(\varphi) g^{-1}$$

Entonces, $\ker(\varphi) \subseteq g \ker(\varphi) g^{-1}$.

Pon lo tanto, $g \ker(\varphi) g^{-1} = \ker(\varphi) \ \forall g \in G$.

Obs: Note que el angumento antenion vale em genenal, es decin, podemos ven que si $N < G$, entonces

$$\underset{\forall g \in G}{g N g^{-1} \subseteq N} \implies \underset{\forall g \in G}{g N g^{-1} = N}$$

Es decir, $N \trianglelefteq G$ si y solamente si $gNg^{-1} \subseteq N$ para todo $g \in G$; o equivalentemente,

$N \trianglelefteq G$ si y solamente si para todo $x \in N$ se tiene que $gxg^{-1} \in N$ para todo $g \in G$.

En general, la imagen de un homomorfismo no es un subgrupo normal del codominio. Tome como contraejemplo la inclusión $\{id, \sigma_3\} \longrightarrow S_3$ del Ejemplo 2.)

Los subgrupos normales $N \trianglelefteq G$ le dan a G/N estructura de grupo con la operación

$$G/N \times G/N \longrightarrow G/N$$

$$(Na, Nb) \longmapsto N(a \cdot b) =: Na * Nb,$$

como demostraremos a continuación.

<u>Teorema</u>: Sea $N < G$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) $N \trianglelefteq G$.

b) $Ng = gN$, donde $gN := \{g \cdot x \,/\, x \in N\}$. $\forall g \in G$

c) La operación $Na * Nb := N(a \cdot b)$ está bien definida.

· **Demostración:**

a) $\Rightarrow$ b): Solamente demostraremos $Ng \subseteq gN$.

Sea $x \cdot g \in Ng$, es decir, $x \in N$.

$$N \trianglelefteq G \Rightarrow x = g \cdot x' \cdot g^{-1} \text{ para algún } x' \in N.$$

Luego,

$$x \cdot g = (g \cdot x' \cdot g^{-1}) \cdot g = (g \cdot x') \cdot (g^{-1} \cdot g) = g \cdot x' \cdot e$$

$$x \cdot g = g \cdot x' \in gN.$$

b) $\Rightarrow$ c): Supongamos $Ng = gN$, $\forall g \in G$.

Sean $Na = Na'$ y $Nb = Nb'$.

$$Na * Nb := N(a \cdot b),$$

donde $e \cdot a = x \cdot a'$ y $e \cdot b = \tilde{x} \cdot b'$ con $x, \tilde{x} \in N$, ya que $Na = Na'$ y $Nb = Nb'$.

Así,

$$Na * Nb := N(a \cdot b) = N(x \cdot a' \cdot \tilde{x} \cdot b')$$

$$= N(a' \cdot \tilde{x} \cdot b') \text{ ya que } x \in N.$$

Como $a'N = Na'$, existe $x' \in N$ tal que $a' \cdot \tilde{x} = x' \cdot a'$.

Luego, $$Na * Nb = N(a' \cdot \tilde{x} \cdot b') = N(x' \cdot a' \cdot b')$$

$$= N(a' \cdot b') \text{ ya que } x' \in N.$$

$$=: Na' * Nb'.$$

$\therefore$ la operación $*$ está bien definida en G/H.

c) $\Rightarrow$ a) Por la observación anterior, basta probar

$$gNg^{-1} \subseteq N.$$

Sea $g \cdot x \cdot g^{-1} \in gNg^{-1}$ $(x \in N)$. Considere las clases laterales Ng y $N(x \cdot g^{-1})$. Por un lado,

$$Ng * N(x \cdot g^{-1}) = N(g \cdot x \cdot g^{-1}).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} Ng * N(x \cdot g^{-1}) &= Ng * Ng^{-1} \quad (\text{ya que } x \in N) \\ &= N(g \cdot g^{-1}) \\ &= Ne = N. \end{aligned}$$

Entonces, $N(g \cdot x \cdot g^{-1}) = N$ ya que $*$ está bien definida.

$$\begin{aligned} N(g \cdot x \cdot g^{-1}) = N &\Longrightarrow e \cdot (g \cdot x \cdot g^{-1}) = x' \text{ para algún } x' \in N \\ &\Longrightarrow g \cdot x \cdot g^{-1} = x' \in N. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $gNg^{-1} \subseteq N$. ■

Corolario: Si $N \trianglelefteq G$, entonces $(G/N, *)$ es un grupo, llamado grupo cociente. Si G es finito, entonces

$$o(G/N) = [G : N] = o(G)/o(N).$$

• Demostración:

1) Asociatividad de $*$: Sean Na, Nb y Nc en G/N.

$$Na * (Nb * Nc) = Na * N(b\cdot c) = N\, a\cdot(b\cdot c)$$
$$= N(a\cdot b)\cdot c = N(a\cdot b) * Nc$$
$$= (Na * Nb) * Nc.$$

2) Elemento neutro: $e_{G/N} = Ne = N$

Para todo $Na \in G/N$, se tiene que

$$Na * Ne = N(a\cdot e) = Na, \text{ y}$$
$$Ne * Na = N(e\cdot a) = Na.$$

3) Existencia de inversos:

Para todo $Na \in G/N$, $(Na)^{-1} = Na^{-1}$. En efecto,

$$Na * Na^{-1} = N(a\cdot a^{-1}) = Ne = e_{G/H}.$$

$\blacksquare$

<u>Ejemplo</u>: 1) $G = \mathbb{Z}$, $N = n\mathbb{Z}$.

$$G/N = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n.$$

2) $\pi : G \longrightarrow G/N$ es un homomorfismo de grupos,
$\pi(g) = Ng$ llamado <u>proyección canónica</u>.

En efecto, $\pi(g\cdot g') = N(g\cdot g') = Ng * Ng' = \pi(g) * \pi(g')$

Más aún, $\ker(\pi) = N$.

$$g \in \ker(\pi) \Leftrightarrow \pi(g) = e_{G/N} \Leftrightarrow Ng = Ne \Leftrightarrow g \in N.$$

→ Observe que $N \trianglelefteq G$ si y solamente si N es el núcleo de algún homomorfismo.

Escaneado con CamScanner

3) Considere $G = (\mathbb{R}, +)$ y $N = (\mathbb{Z}, +)$.

$\mathbb{Z}$ es un subgrupo normal de $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{ x + \mathbb{Z} \,/\, x \in \mathbb{R} \}$, donde

$$x + \mathbb{Z} = \{ x + a : a \in \mathbb{Z} \}$$

↳ denotamos así la clase lateral de x porque la operación en este caso es la suma habitual, que además es conmutativa.

Por otro lado, considere

$$S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1 \} \quad \text{(circunferencia unitaria)}$$

S^1 con el producto de números complejos es un grupo, donde el neutro viene dado por $z = 1$.

Sea $\varphi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow S^1$ la función dada por

$$\varphi(x + \mathbb{Z}) = e^{2\pi i x}.$$

Recuerde que

$$e^{2\pi i x} = \cos(2\pi x) + i \operatorname{sen}(2\pi x)$$

donde $i \in \mathbb{C}$ es la unidad imaginaria $(i^2 = -1)$.

Veamos que φ es un isomorfismo.

(i) φ está bien definida: Supongamos $x + \mathbb{Z} = x' + \mathbb{Z}$.

Luego, $x' = x + a$ con $a \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\varphi(x' + \mathbb{Z}) = e^{2\pi i x'} = e^{2\pi i (x+a)} = e^{2\pi i x} \cdot e^{2\pi i a}$$

$$= e^{2\pi i x} \cdot 1 \quad (\text{ya que } \cos(2\pi a) = 1 \text{ y } \operatorname{sen}(2\pi a) = 0)$$

$$= \varphi(x + \mathbb{Z}).$$

(ii) φ es un homomorfismo:

$$\varphi((x+\mathbb{Z}) + (y+\mathbb{Z})) = \varphi((x+y) + \mathbb{Z})$$

$$= e^{2\pi i (x+y)} = e^{2\pi i x} \cdot e^{2\pi i y}$$

$$= \varphi(x+\mathbb{Z}) \cdot \varphi(y+\mathbb{Z}).$$

(iii) φ es inyectivo:

Si $\varphi(x+\mathbb{Z}) = 1$, entonces $e^{2\pi i x} = 1$.

Luego,

$$\cos(2\pi x) + i \operatorname{sen}(2\pi x) = 1,$$

es decir,

$$\cos(2\pi x) = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(2\pi x) = 0.$$

Así,

$$2\pi x = 2\pi k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

$$x = k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto, $x + \mathbb{Z} = 0 + \mathbb{Z}$.

(iv) φ es sobreyectivo:

Sea $z \in S^1$. Usando la forma polar de z, sabemos que $z = |z| e^{2\pi i \operatorname{Arg}(z)}$, donde $\operatorname{Arg}(z)$ es el argumento principal de z. Como $|z|=1$, nos queda

$$z = e^{2\pi i \, Arg(z)} = \varphi(Arg(z) + \mathbb{Z}).$$

(4) Considere dentro de D_4 el subgrupo

$$N = \langle r^2 \rangle = \{id, r^2\}.$$

(r = rotación de $90°$).

- $N \trianglelefteq D_4$:
  - $id \circ r^2 \circ id = r^2 \in N$
  - $r \circ r^2 \circ r^{-1} = r \circ r^2 \circ r^3 = r^6 = r^2 \in N.$
  - $r^2 \circ r^2 \circ (r^2)^{-1} = r^4 \circ r^2 = r^6 = r^2 \in N.$
  - $r^3 \circ r^2 \circ (r^3)^{-1} = r^3 \circ r^2 \circ r = r^6 = r^2 \in N.$
  - $s \circ r^2 \circ (s)^{-1} = s \circ r^2 \circ s = s(r^2 s) = s s r^2 = r^2 \in N$
  - $sr \circ r^2 (sr)^{-1} = sr^3 \circ sr = r^2 \in N.$
  - $sr^2 \circ r^2 \circ (sr^2)^{-1} = s \circ s r^2 = r^2 \in N.$
  - $sr^3 \circ r^2 \circ (sr^3)^{-1} = sr \cdot sr^3 = r^2 \in N.$

  Entonces, $gNg^{-1} \subseteq N$ para todo $g \in D_4$.
  (Para los cálculos anteriores, tengo en cuenta la tabla de Cayley de D_4).

- $D_4/\langle r^2 \rangle$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (Klein's vieren gruppe). En efecto,

  $$D_4/\langle r^2 \rangle = \{\langle r^2 \rangle, \langle r^2 \rangle \circ r, \langle r^2 \rangle s, \langle r^2 \rangle sr\}.$$

Por otro lado, $o(\langle r^2 \rangle) = 1$,

$o(\langle r^2 \rangle r) = 2$,

$o(\langle r^2 \rangle s) = 2$, y

$o(\langle r^2 \rangle sr) = 2$.

Como todo grupo de 4 elementos es abeliano e isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ o a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, y $D_4/\langle r^2 \rangle$ no es cíclico, tenemos que

$$D_4/\langle r^2 \rangle \text{ es isomorfo a } \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Note que tenemos un ejemplo de grupo cociente abeliano $D_4/\langle r^2 \rangle$ donde D_4 no es abeliano.

Teoremas de isomorfismos

Vimos en uno de los ejemplos anteriores que si $N \trianglelefteq G$, tenemos un homomorfismo sobreyectivo

$$\pi : G \longrightarrow G/N$$
$$g \longmapsto Ng$$

donde $\ker(\pi) = N$. Tenemos así que G/N e $\mathrm{Im}(\pi)$ son isomorfos, es decir,

$$G/_{\ker(\pi)} \simeq \mathrm{Im}(\pi).$$

El primer teorema de isomorfismos generaliza el hecho anterior a cualquier homomorfismo de grupos.

Primer teorema de isomorfismos: Sea

$$\varphi : (G, *) \longrightarrow (K, \triangle)$$

un homomorfismo de grupos. Entonces, el grupo cociente $G/_{Ker(\varphi)}$ es isomorfo a $Im(\varphi)$.

$$\left(G/_{Ker(\varphi)} \simeq Im(\varphi) \right)$$

· **Demostración:** $G/_{Ker(\varphi)} = \{ Ker(\varphi) * g \,/\, g \in G \}$.

Definimos

$$\Phi : G/_{Ker(\varphi)} \longrightarrow Im(\varphi)$$

de la siguiente manera:

$$\forall\, Ker(\varphi) * g \in G/_{Ker(\varphi)},$$

$$\Phi\left(Ker(\varphi) * g \right) := \varphi(g).$$

i) Φ es una función bien definida:

Si $Ker(\varphi) * g = Ker(\varphi) * g'$, entonces

$$g' = x * g \quad \text{con} \quad x \in Ker(\varphi).$$

Luego,

$$\Phi\left(Ker(\varphi) * g' \right) = \varphi(g') = \varphi(x * g) = \varphi(x) \triangle \varphi(g)$$
$$= e_K \triangle \varphi(g) = \varphi(g) = \Phi\left(Ker(\varphi) * g \right).$$

Tenemos así que

$$\mathrm{Ker}(\varphi) * g = \mathrm{Ker}(\varphi) * g' \Rightarrow \Phi(\mathrm{Ker}(\varphi) * g) = \Phi(\mathrm{Ker}(\varphi) * g').$$

ii) Φ es un homomorfismo de grupos:

Sean $\mathrm{Ker}(\varphi) * g_1, \mathrm{Ker}(\varphi) * g_2 \in G/\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Luego,

$$\Phi\left((\mathrm{Ker}(\varphi) * g_1) \cdot (\mathrm{Ker}(\varphi) * g_2)\right) = \Phi(\mathrm{Ker}(\varphi) * (g_1 * g_2))$$

$$= \varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \cdot \varphi(g_2)$$

$$= \Phi(\mathrm{Ker}(\varphi) * g_1) \cdot \Phi(\mathrm{Ker}(\varphi) * g_2).$$

iii) Φ es inyectiva:

Sea $\mathrm{Ker}(\varphi) * g \in G/\mathrm{Ker}(\varphi)$ tal que

$$\Phi(\mathrm{Ker}(\varphi) * g) = e_K.$$

Luego, $\varphi(g) = e_K$, es decir, $g \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Por lo tanto, $\mathrm{Ker}(\varphi) * g = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

iv) Φ es sobreyectiva:

Esto es inmediato de la definición de Φ.

■

El teorema de los órdenes es un caso particular del primer teorema de isomorfismos.

<u>Teorema de los órdenes</u>: Si $\varphi : G \to K$ es un homomorfismo de grupos, entonces

$$o(G) = o(Ker(\varphi)) \cdot o(Im(\varphi)).$$

· <u>Demostración</u>: Por el primer teorema de isomorfismos, tenemos que

$$G/_{Ker(\varphi)} \simeq Im(\varphi).$$

Luego,

$$o\left(G/_{Ker(\varphi)}\right) = o(Im(\varphi)).$$

i) $Im(\varphi)$ es de orden infinito:

En este caso, $o\left(G/_{Ker(\varphi)}\right) = \infty$. Por otro lado, como

$$\pi : G \longrightarrow G/_{Ker(\varphi)}$$
$$g \longmapsto Ker(\varphi) * g$$

es un homomorfismo sobreyectivo, se tiene que

$$o\left(G/_{Ker(\varphi)}\right) \leq o(G).$$

Lo anterior implica que

$$o(G) = \infty = o(Ker(\varphi)) \cdot o(Im(\varphi)),$$

donde $o(Ker(\varphi)) \geq 1$.

ii) $Im(\varphi)$ es de orden finito:

En este caso,

$$o\left(G/Ker(\varphi)\right) = [G : Ker(\varphi)] = o(G)/o(Ker(\varphi))$$

Como $o\left(G/Ker(\varphi)\right) = o(Im(\varphi))$, obtenemos

$$o(G)/o(Ker(\varphi)) = o(Im(\varphi))$$

$$o(G) = o(Ker(\varphi)) \cdot o(Im(\varphi)).$$

$\blacksquare$

El segundo teorema de isomorfismos es un análogo de la regla de la división para fracciones:

$$\frac{a/b}{c/b} = a/c \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad b, c \neq 0.$$

<u>Segundo teorema de isomorfismos</u>: Sea $(G, *)$ un grupo y H y N subgrupos normales de G tales que $H \subseteq N$. Entonces:

1) N/H es un subgrupo normal de G/H.

2) G/N es isomorfo a $(G/H)/(N/H)$.

· Demostración:

1) El lector debe verificar que N/H es un subgrupo de G/H.

Por otro lado, veamos que

$$(Hg)\cdot(N/H)\cdot(Hg)^{-1} \subseteq N/H.$$

Sea $Hx \in N/H$. Tenemos

$$(Hg)\cdot(Hx)\cdot(Hg)^{-1} = (Hg)\cdot(Hx)\cdot(Hg^{-1})$$
$$= H(g\cdot x\cdot g^{-1}).$$

$$x \in N \text{ y } N \trianglelefteq G \Rightarrow g\cdot x\cdot g^{-1} \in N.$$

Entonces,

$$(Hg)\cdot(Hx)\cdot(Hg)^{-1} = H(g\cdot x\cdot g^{-1}) \in N/H.$$

Por lo tanto, $N/H \trianglelefteq G/H$.

2) Considere la función $\varphi : G/H \longrightarrow G/N$ dada por

$$\varphi(Hg) := Ng.$$

(i) φ está bien definida:

Si $Hg = Hg'$, entonces $g' = xg$ para algún $x \in H$.

Luego,

$$\varphi(Hg') = Ng' = N(xg) = Ng = \varphi(Hg)$$

↳ ya que $x \in H \subseteq N$.

(ii) φ es un homomonfismo:

Sean $Hg_1, Hg_2 \in G/H$. Tenemos lo siguiente:

$$\varphi((Hg_1)\cdot(Hg_2)) = \varphi(H(g_1 * g_2)) = N(g_1 * g_2)$$
$$= (Ng_1)\cdot(Ng_2)$$
$$= \varphi(Hg_1)\cdot\varphi(Hg_2).$$

(iii) $\text{Ken}(\varphi) = N/H$:

Sea $Hg \in \text{Ken}(\varphi)$. Luego,

$$Ng = \varphi(Hg) = e_{G/N} = N.$$

$$Ng = N \Longrightarrow g \in N \Longrightarrow Hg \in N/H.$$

Ahona, sea $Hx \in N/H$ (es decin, $x \in N$).

$\varphi(Hx) = Nx = N$ ya que $x \in N$.

Pon lo tanto, $\text{Ken}(\varphi) = N/H$.

(iv) φ es subnegectiva:

Esto es inmediato de la definición de φ.

Pon el pnimen teonema de isomonfismo, se tiene:

$$G/N = \text{Im}(\varphi) \simeq (G/H)\big/\text{Ken}(\varphi) = \frac{G/H}{N/H}.$$

■

Ejemplo: Considere $G = (\mathbb{C}, +)$, $N = \mathbb{R}$ y $H = \mathbb{Z}$.
Por el segundo teorema de isomorfismos, se tiene que

$$\frac{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \cong \mathbb{C}/\mathbb{R}.$$

Por otro lado,

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{(a+ib) + \mathbb{R} \,/\, a+ib \in \mathbb{C}\}.$$

Como $a \in \mathbb{R}$, tenemos

$$(a+ib) + \mathbb{R} = ib + \mathbb{R}.$$

Así,

$$\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{ib + \mathbb{R} \,/\, b \in \mathbb{R}\}$$

La función $\varphi : \mathbb{C}/\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ define un

$$ib + \mathbb{R} \longmapsto b$$

isomorfismo de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Por lo tanto,

$$\frac{\mathbb{C}/\mathbb{Z}}{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{C}/\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}.$$

Finalizamos estas notas con el último teorema de isomorfismos.

<u>Tercer teorema de isomorfismos</u>: Sea G un grupo y H y N subgrupos normales de G. Se define el conjunto

$$HN := \{h * n \,/\, h \in H \text{ y } n \in N\}.$$

Entonces:

1) HN es un subgrupo de G.

2) H es un subgrupo normal de HN.

3) Los grupos cociente $N/_{(N \cap H)}$ y $HN/_{H}$ son isomorfos.

· <u>Demostración</u>:

1) $e \in HN$ ya que $e = e * e$ donde $e \in H$ y $e \in N$.

Por otro lado, considere $h * n,\ \tilde{h} * \tilde{n} \in HN$.

Tenemos:

- $(h * n) * (\tilde{h} * \tilde{n}) = h * (n * \tilde{h}) * \tilde{n}$

$= h * (\tilde{h} * n') * \tilde{n}$ para algún $n' \in N$

$\hookrightarrow N\tilde{h} = \tilde{h}N$ ya que $N \trianglelefteq G$.

$= \underbrace{(h * \tilde{h})}_{\in H} * \underbrace{(n' * \tilde{n})}_{\in N} \in HN$ ya que $H < G$ y $N < G$

- $(h * n)^{-1} = n^{-1} * h^{-1} = h^{-1} * \hat{n}$ para algún $\hat{n} \in N$, y $(h * n)^{-1} = h^{-1} * \hat{n} \in HN$. con $h^{-1} \in H$.

Escaneado con CamScanner

Por lo tanto, $HN < G$.

2) Esto es inmediato ya que $H \trianglelefteq G$ y $HN < G$.

3) Considere la función $\varphi : N \longrightarrow HN/_H$ dada por

$$\varphi(n) := H(e * n) = Hn.$$

(i) φ es un homomorfismo:

$$\varphi(n_1 * n_2) = H(n_1 * n_2) = (Hn_1) \cdot (Hn_2) = \varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2)$$

(ii) $Ker(\varphi) = H \cap N$:

Sea $n \in Ker(\varphi)$. Luego, $Hn = \varphi(n) = e_{HN/_H} = H$.

$Hn = H \Longrightarrow n \in H$. Como $n \in N$ y $n \in H$, tenemos

$$n \in H \cap N.$$

Por otro lado, si $h \in H \cap N$ entonces $\varphi(h) = Hh = H$.
Por lo tanto

$$Ker(\varphi) \subseteq H \cap N \subseteq Ker(\varphi)$$

$$(\,Ker(\varphi) = H \cap N\,).$$

(iii) φ es sobreyectiva:

Sea $H(h * n) \in HN/_H$, donde $h \in H$ y $n \in N$.

Luego,

$$H(h * n) = Hn = \varphi(n).$$

↳ ya que $h \in H$

Por lo tanto, φ es sobreyectiva.

Por el primer teorema de isomorfismos, se tiene que: 98

$$HN/H = \mathrm{Im}(\varphi) \simeq N/\mathrm{Ker}(\varphi) = N/(H \cap N).$$

$\blacksquare$