Matemática Discreta 1, Curso 2020
Lista de resultados teóricos y definiciones más importantes

Las 20 demostraciones que pueden ir para el segundo parcial:

- **Relaciones.**
  1. Proposición:
     - $\mathcal{M}(R)^t = \mathcal{M}(R^{-1})$, para toda $R \in \mathrm{Rel}(A, B)$;
     - $\mathcal{M}(R) + \mathcal{M}(S) = \mathcal{M}(R \cup S)$, para $R, S \in \mathrm{Rel}(A, B)$;
     - $\mathcal{M}(R) \cap \mathcal{M}(S) = \mathcal{M}(R \cap S)$ para $R, S \in \mathrm{Rel}(A, B)$;
     - $\mathcal{M}(RS) = \mathcal{M}(R)\mathcal{M}(S)$, para $R \in \mathrm{Rel}(A, B), S \in \mathrm{Rel}(B, C)$.
  2. Teorema: Sea R una relación en A con $\#A = n$. Se cumple:
     - R reflexiva $\Leftrightarrow \mathcal{M}(R) \geq I_n$;
     - R simétrica $\Leftrightarrow \mathcal{M}(R)$ simétrica;
     - R transitiva $\Leftrightarrow \mathcal{M}(R) \geq \mathcal{M}(R)^2$;
     - R antisimétrica $\Leftrightarrow \mathcal{M}(R) \cap \mathcal{M}(R)^t \leq I_n$.

- **Relaciones de equivalencias y de órdenes.**
  1. Proposición: Clases de equivalencia distintas son disjuntas.
  2. Teorema: Existe una correspondencia biunívoca entre relaciones de equivalencias en A y particiones de A.
  3. Proposición: Elementos en un mismo nivel del diagrama de Hasse de un orden parcial forman una anticadena.
  4. Proposición: Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $B \subseteq A$. Entonces el máximo, mínimo, supremo e ínfimo de B si existe, es único.

- **Teoría de grafos - conceptos básicos.**
  1. Proposición: Dos grafos son isomorfos si y solo si sus complementos lo son.
  2. Proposición: Todo grafo conexo posee un árbol recubridor.

3. Teorema: Sea $G = (V, E)$ un grafo. Son equivalentes:
   i. G es un árbol (i.e. conexo y acíclico);
   ii. G es conexo y $|V| = |E| + 1$;
   iii. G acíclico y $|V| = |E| + 1$;
   iv. G es conexo minimal (quitando cualquier arista deja de ser conexo);
   v. G es acíclico maximal (agregando cualquier arista deja de ser acíclico).

- **Teoría de grafos - recorridos y circuitos eulerianos.**

  1. Teorema: Sea G grafo o multigrafo sin vértices aislados. G admite circuito euleriano si y solo si G es conexo y todo vértice tiene grado par.

- **Teoría de grafos - camino y ciclo hamiltoniano.**

  1. Proposición: Sea G un grafo con n vértices. Si $\mathrm{gr}(v)+\mathrm{gr}(w) \geq n-1$ para todo par de vértices distintos y no adyacentes v, w entonces G es conexo.
  2. Proposición: Si G es conexo y tiene un camino simple maximal con $k \geq 3$ vértices, donde sus extremos v, w verifican $\mathrm{gr}(v) + \mathrm{gr}(w) \geq k$, entonces G admite un cilo de longitud k.
  3. Proposición: Si G es conexo con n vértices y posee un ciclo de longitud $k < n$ entonces posee un camino simple de longitud k (o sea, con $k + 1$ vértices).
  4. Teorema: Si G es un grafo que verifica que $\mathrm{gr}(v) + \mathrm{gr}(w) \geq n - 1$ para todo par de vértices distintos v, w entonces G tiene un camino hamiltoniano.
  5. Teorema: Si G es un grafo que verifica que $\mathrm{gr}(v)+\mathrm{gr}(w) \geq n$ para todo par de vértices distintos no adyacentes v, w entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

- **Teoría de grafos - planitud.**

  1. Teorema (fórmula de Euler generalizada): Si G es un grafo o multigrafo plano con v vértices, e aristas, r regiones y κ componentes conexas entonces $v-e+r = 1+\kappa$. (asumiendo la fórmula de Euler para grafos conexos $v - e + r = 2$).

2. Proposición. Si G es un grafo plano conexo simple con v vértices y e aristas entonces $3v - e \geq 6$.
3. Proposición. Si G es un grafo plano conexo simple bipartito con v vértices y e aristas entonces $2v - e \geq 4$.
4. Teorema: Los grafos $K_{3,3}$ y K_5 no son grafos planos.
5. Proposición: El grafo de Petersen no es plano (asumiendo el Teo. de Kuratowski).