Primer Parcial de Cálculo 1

Martes 15 de mayo de 2007.

No. Parcial	Apellido y nombre	Cédula de Identidad

Ejercicio 1.
Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in \mathbb{Q} \\ 1 + x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Donde $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ representa el conjunto de los números irracionales.
Indicar la opción correcta.

(A) f es continua en todo punto $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pero no es derivable en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(B) f es continua en $x = 0$ pero no es derivable en $x = 0$.

(C) f es continua en $x = 0$ y derivable en $x = 0$.

(D) f es continua en todo punto $x \in \mathbb{Q}$ pero existe algún punto $x_0 \in \mathbb{Q}$ en donde f no es derivable.

(E) f es discontinua en todo punto de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.
Sea g una función positiva y derivable en x_0 tal que $g(x_0) = g'(x_0) \neq 0$. Sea

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{\log(g(x_0 + h)) - \log(g(x_0))}{h}.$$

Indicar la opción correcta:

(A) $L = 1$

(B) $L = \frac{1}{2}$

(C) $L = 0$

(D) No existe el límite.

(E) $L = +\infty$.

Ejercicio 3.
Sean las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$$

Indicar la opción correcta.

(A) f alcanza un máximo y g alcanza un mínimo.

(B) f^2 alcanza un máximo y g alcanza un mínimo.

(C) f está acotada pero no alcanza ni máximo ni mínimo y g alcanza un mínimo.

(D) f alcanza un mínimo y $-g$ está acotada superiormente.

(E) f^2 alcanza un mínimo y g^2 es no acotada.

Ejercicio 4.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se consideran los siguientes enunciados:

Enunciado I *Si f es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}$, entonces la imagen por f de cualquier intervalo cerrado y acotado es también un intervalo cerrado y acotado.*

Enunciado II *Si la imagen por f de cualquier intervalo cerrado y acotado es un intervalo cerrado y acotado entonces f es una función continua en todo punto $x \in \mathbb{R}$.*

Indicar la opción correcta:

(A) Ambos enunciados son verdaderos.

(B) El **Enunciado II** es verdadero pero el **Enunciado I** es falso, y un contraejemplo es la función f tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

(C) El **Enunciado I** es verdadero pero el **Enunciado II** es falso y un contraejemplo es la función f tal que $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

(D) El **Enunciado I** es verdadero pero el **Enunciado II** es falso y un contraejemplo es la función f tal que $f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

(E) Ambos enunciados son falsos.

Ejercicio 5.
Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{Arctg}(x)$ y $g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \operatorname{Arctg}(1/x)$.
Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $f(x) + g(x) = \pi/2, \forall\, x \in [1, +\infty)$.

(II) $f(b) \leq f(a) + \frac{1}{2}(b - a)$, $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

(III) $g(b) \leq g(a) + \frac{1}{2}(b - a)$, $\forall\, a, b \in [1, +\infty)$ con $a < b$.

Indicar la opción correcta.

(A) Sólo (I) es verdadera.

(B) Sólo (II) es verdadera.

(C) Sólo (III) es verdadera.

(D) Las tres afirmaciones son verdaderas.

(E) Sólo (I) y (III) son verdaderas.

Ejercicio 6.
Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2^x$ y $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $Q(x) = \frac{1}{2} + (\frac{\log 2}{2})x$.
Sea $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el polinomio de segundo grado que cumple:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - Q(x) - P(x)}{x^2} = 0$$

Indicar la opción correcta

(A) $P(x) = 1 + (\log 2)x + \left(\frac{\log 2}{2}\right)^2 x^2$.

(B) $P(x) = \frac{1}{2}(1 + (\log 2)x + (\log 2)^2 x^2)$.

(C) $P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

(D) $P(x) = \frac{1}{2} + (\log 2)x + \left(\frac{\log 2}{2}\right)^2 x^2$.

(E) No existe ningún polinomio que cumpla lo pedido.

Ejercicio 7.
Se consideran las siguientes afirmaciones:
(I) Las raíces n–ésimas complejas de la unidad están dadas por $\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ donde $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

(II) Si $z \in \mathbb{C}$ es raíz n–ésima de la unidad, existe $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta| = 1$ tal que $\beta^k z$ es raíz n–ésima de la unidad, $\forall\, k = 0, \ldots, n-1$.
(III) Si $z \in \mathbb{C}$ es raíz n–ésima ($n > 1$) de la unidad, entonces kz es raíz n–ésima de la unidad, $\forall\, k = 1, 2 \ldots, n$.

Indicar la opción correcta.

(A) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son correctas.

(B) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.

(C) Sólo la afirmación (I) es correcta.

(D) Sólo la afirmación (II) es correcta.

(E) Sólo la afirmación (III) es correcta.

Ejercicio 8.
Sea $f : [0, 2] \to [0, 2 - \log 3]$ tal que $f(x) = x - \log(1 + x)$.
Indicar la opción correcta:

(A) f no es invertible.

(B) f es invertible y $(f^{-1})'(1 - \log 2) = 2$.

(C) f es invertible y $(f^{-1})'(1 - \log 2) = \frac{2 - \log 2}{1 - \log 2}$.

(D) f es invertible y $(f^{-1})'(1 - \log 2) = \frac{1 - \log 2}{2 - \log 2}$.

(E) f es invertible y $(f^{-1})'(1 - \log 2) = \frac{1}{2}$.

Ejercicio 9.
Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y periódica[1] de período $T > 0$, entonces f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

(II) Si $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ es continua y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces f es uniformemente continua en $[a, +\infty)$.

(III) Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es continua y acotada, entonces f es uniformemente continua en (a, b).

Indicar la opción correcta.

[1] f es periódica si existe $T > 0$ tal que $f(x) = f(x + T)$, $\forall\, x$. Al menor número T que verifica lo anterior se lo llama período.

(A) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son correctas.

(B) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.

(C) Sólo la afirmaciones (II) y (III) son correctas.

(D) Sólo la afirmación (II) es correcta.

(E) Sólo la afirmación (I) es correcta.

Ejercicio 10.
Se consideran el siguiente enunciado:

Teorema: *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua, entonces existe* M *tal que* $f(x) \leq M \ \forall x \in [a, b]$.

y el siguiente esquema de demostración:

Demostración
Sea $A = \{x \in [a, b] \ : \ f$ es acotada en $[a, x]\}$.

Paso 1
$A \neq \varnothing$ pues $a \in A$ y además A es acotado pues $A \subset [a, b]$ entonces en virtud del axioma de completitud A tiene supremo. Indicaremos por $\alpha = \sup(A)$.

Paso 2
Se cumple que $\alpha = b$, en efecto supongamos por absurdo que $\alpha < b$. Como f es continua en α, existe $\delta > 0$ tal que $a < \alpha - \delta < \alpha + \delta < b$ y f acotada en $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$. Sean x_1 y x_2 tales que, $\alpha - \delta < x_1 < \alpha < x_2 < \alpha + \delta < b$. Como $[x_1, x_2] \subset (\alpha - \delta, \alpha + \delta)$, f está acotada en $[x_1, x_2]$. Por otra parte como $\alpha = \sup(A)$, f es acotada en $[a, x] \ \forall x < \alpha$, en particular en $[a, x_1]$. Se deduce entonces que f esta acotada en $[a, x_2] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2]$ entonces $x_2 \in A$ lo cual es absurdo porque $x_2 > \alpha$.

Paso 3
Como b es el supremo de A, f resulta acotada en todo intervalo $[a, x]$, con $x < b$. De esto y de la continuidad de f en b se deduce que, f es acotada en $[a, b]$

Afirmaciones:

(I) El paso 1 es incorrecto porque el supremo del conjunto A podría no existir.

(II) El paso 2 es incorrecto pues f podría tener cotas diferentes en $[a, x_1]$ y en $[x_1, x_2]$ y en consecuencia no estar acotada en $[a, x_2]$.

(III) En el paso 3 la hipótesis de continuidad de f en b no es necesaria.

Indicar la opción correcta:

(A) Sólo la afirmación (III) es verdadera.

(B) Las tres afirmaciones son verdaderas.

(C) Las tres afirmaciones son falsas.

(D) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.

(E) Sólo la afirmación (II) es verdadera.