**Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL** **Cálculo 1**

PRIMER PARCIAL - 5 DE OCTUBRE DE 2013. DURACIÓN: 3 HORAS

| N° de parcial | Cédula | Apellido y nombre | Salón |
|---|---|---|---|
| | | | |

## Múltiple opción (Total: 30 puntos) En cada pregunta hay una sola opción correcta.

**Respuesta correcta: 5 puntos** **Respuesta incorrecta: -1.25 punto** **No responde: 0 punto**

**Ejercicio 1.**
Se sabe que el polinomio $P(z) = z^5 - 7z^4 + 21z^3 - 33z^2 + 28z - 10$ tiene una raíz compleja $z_0$ que cumple $|z_0| = \sqrt{2}$ y $Arg(z_0) = \frac{7\pi}{4}$.
Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $P$ tiene dos raíces reales y tres raíces con parte imaginaria no nula.

(II) $P$ es divisible por el polinomio $Q(z) = z^2 - 2z + 2$.

(III) $P$ es divisible por el polinomio $R(z) = (z-2)(z-2+i)$.

(IV) $P$ tiene al menos una raíz cuyo módulo es $\sqrt{5}$.

Entonces:

(A) Solo las afirmaciones (III) y (IV) son correctas.

(B) Solo las afirmaciones (I) y (IV) son correctas.

(C) Solo las afirmaciones (II) y (IV) son correctas.

(D) Solo las afirmaciones (I), (II) y (IV) son correctas.

(E) Solo la afirmación (II) es correcta.

**Ejercicio 2.**
Sean los conjuntos:

- $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$
- $B = [0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- $C = \left\{a^2 : a \in A\right\}$
- $D = \left\{\sqrt{b} : b \in B\right\}$
- $E = \left\{x^2 : x \in [0,1]\right\}$

y las siguientes afirmaciones:

(I) $C = A$

(II) $D \subseteq B$

(III) $B \subseteq D$

(IV) $E = [0,1]$

Entonces:

(A) Solo las afirmaciones (II) y (IV) son correctas.

(B) Solo la afirmacin (III) es correcta.

(C) Solo las afirmaciones (I) y (II) son correctas.

(D) Solo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.

(E) Solo las afirmaciones (III) y (IV) son correctas.

**Ejercicio 3.**
Decidir para cual valor del parámetro $a$ la siguente igualdad es correcta: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - sen(x) - ax^2}{x^3} = \dfrac{1}{3}$.

(A) Solo para $a = 1$.

(B) Para cualquier valor de $a$.

(C) Solo para $a = 0$.

(D) Solo para $a = \frac{1}{2}$.

(E) Solo para $a = \frac{3}{2}$.

**Ejercicio 4.**
Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ definida por la siguiente relación de recurrencia, $a_0 = 0$ y

$$a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n},$$

para todo $n \geq 0$. Indicar cual de las sigientes afirmaciones es correcta:

(A) $(a_n)_{n\geq 0}$ es monótona y converge al valor 1.

(B) $(a_n)_{n\geq 0}$ es monótona pero no convergente.

(C) $(a_n)_{n\geq 0}$ está acotada superiormente pero no converge.

(D) $(a_n)_{n\geq 0}$ converge al valor 1 pero no es monótona.

(E) $(a_n)_{n\geq 0}$ converge al valor $\frac{1}{2}$.

**Ejercicio 5.**
Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & \text{si } x \leq 0 \\ \beta \cdot \cos x, & \text{si } x \in (0,1) \\ x^2 - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ es un parámetro. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $f$ no es continua en $\mathbb{R}$ para ningn valor de $\beta$.

(II) $f$ es continua en $x = 1$ para $\beta = 1$.

(III) $f$ es derivable en $x = 0$ para $\beta = 1$ y $f$ no es derivable en $x = 1$ para ningún valor de $\beta$.

(IV) $f$ es continua en $\mathbb{R}$ para $\beta = 1$.

(V) $f$ es continua en $x = 1$ para $\beta = 0$.

Marcar la opción correcta:

(A) Solo las afirmaciones (II), (III) y (IV) son verdaderas.

(B) Solo las afirmaciones (III) y (IV) son verdaderas.

(C) Solo la afirmación (I) es verdadera.

(D) Solo las afirmaciones (III) y (V) son verdaderas.

(E) Solo las afirmaciones (I), (III) y (V) son verdaderas.

**Ejercicio 6.**
Se considera la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\pi} & \text{si } x < 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \\ \log\left[(x+1)^{\frac{1}{2x}}\right] & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

El valor de $\alpha$ que hace que $g$ sea continua en $\mathbb{R}$ es:

(A) $\alpha = \frac{1}{2}$.

(B) $\alpha = 1$.

(C) $\alpha = \frac{1}{4}$.

(D) $\alpha = -\frac{1}{2}$.

(E) No existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que haga que $g$ sea continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

**Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL** **Cálculo 1**

PRIMER PARCIAL - 5 DE OCTUBRE DE 2013 DURACIÓN: 3 HORAS

| N° de parcial | Cédula | Apellido y nombre | Salón |
|---|---|---|---|
| | | | |

**Desarrollo (Total: 10 puntos) Justificar las respuestas y responder solamente en esta hoja.**

1. Formular y probar el Teorema de Bolzano.
2. Probar que la ecuación $x^2(\frac{1}{4}x^2 - 1) = -\ln(x)$ tiene exactamente una solución en el intervalo $(1, 2)$.
3. Sea $g(x)$ la función inversa de la función $f(x) := \frac{1}{4}x^4 - x^2 + \ln(x)$ para $x > 0$. Calcular si existe la derivada de $g$ en el punto $f(1)$, esto es: $g'[f(1)]$. Justificar.