Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

SEGUNDO PARCIAL - 2 DE JULIO DE 2016 DURACIÓN: 4 HORAS

N° de lista	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple Opción

24 puntos

En cada pregunta hay una sola opción correcta.

Respuesta correcta: 4 puntos **Respuesta incorrecta: -1 punto** **No responde: 0 puntos**

Respuestas

1	2	3	4	5	6

1) La integral impropia

$$\int_2^{+\infty} \frac{3}{x^2+x-2}dx$$

tiene el siguiente comportamiento:

A) Diverge.

B) Converge a $\frac{3}{2}$.

C) Converge a $\frac{1}{2}$.

D) Converge a $\log 4$.

E) Converge a $\log 8$.

2) Sean f, g funciones continuas no negativas en $[a,b]$. El volumen de revolución del sólido generado por la región comprendida entre las rectas $x=a$, $x=b$ y ambas gráficas al girar en torno al eje $\overrightarrow{ox}$ vale:

A) $\pi\int_a^b (f-g)^2$

B) $\pi\int_a^b (f^2-g^2)$

C) $\pi\int_a^b |f-g|$

D) $\pi\int_a^b (f-g)$

E) $\pi\int_a^b |f^2-g^2|$

3) Sean $f : f(x) = xe^{x^2}$ y $g : g(x) = e(2-x)$. Entonces el área de la región encerrada por ambas gráficas y las rectas $x = 0$, $x = 2$ vale:

A) $\frac{e^4+1}{2}$

B) $e^4 + \frac{1}{2}$

C) $2e - \frac{e^4-1}{2}$

D) $\frac{e^4-1}{2} - 2e$

E) 0

(*Sug.: Considere* $x = 1$)

4) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable con $g(4) = g'(4) = \frac{1}{2}$, y $F(x) = \int_4^{x^2} g(t)dt$. Entonces el polinomio de Taylor de $F(x)$ en $x = 2$ de orden 2 es:

A) $P_2(F, 2)(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2$

B) $P_2(F, 2)(x) = \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2$

C) $P_2(F, 2)(x) = \frac{1}{2} + 2(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2$

D) $P_2(F, 2)(x) = \frac{1}{2}(x-2) + \frac{9}{2}(x-2)^2$

E) $P_2(F, 2)(x) = 2(x-2) + \frac{9}{2}(x-2)^2$

5) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(x)(x^2 - x)$. Entonces, la derivada de orden 1000 de f en 0 es:

A) $f^{(1000)}(0) = -\dfrac{1000!}{2003!}$.

B) $f^{(1000)}(0) = 1000$.

C) $f^{(1000)}(0) = 0$.

D) $f^{(1000)}(0) = -(1000!)$.

E) $f^{(1000)}(0) = 1$.

(*Sug.: Considere el desarrollo de Taylor de* $f(x)$ *para un orden y punto convenientes*)

6) Sea (a_n) una sucesión de números positivos tal que $\sum a_n$ converge. Entonces necesariamente:

A) $\sum a_n^2$ converge.

B) $\sum \sqrt{a}_n$ converge.

C) $\sum \frac{1}{a_n}$ converge.

D) $\sum (1 + a_n)$ converge.

E) $\sum e^{a_n}$ converge.

Desarrollo

36 puntos

Considere que ningún resultado será tomado como válido si no está debidamente justificado.

1) Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ y $\int_0^2 f(t)dt = 6$.

   a) Probar que existe al menos un $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = 3$. Enuncie y demuestre el teorema que le permite probar lo anterior.

   b) Supongamos además que $g : [0, 2]$ es una función acotada con máximo M y mínimo m. Probar que

$$6m \leq \int_0^2 f(t)g(t)dt \leq 6M.$$

   c) Deducir que $6 \leq \int_0^2 \left(3t^2 - 1\right) e^t dt \leq 6e^2$.

2) *a*) Sea f continua en un intervalo abierto I, $a \in I$, y se considera $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para $x \in I$. Enuncie y demuestre el Teorema fundamental del Cálculo.

   b) Sea $F : [\frac{1}{2}, +\infty) \to \mathbb{R}$ siendo $F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt - \frac{\sqrt{x}}{e}$. Analice extremos y crecimiento.

   c) Hallar $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.