Segundo parcial - 9 de julio de 2014 Duración: 3 horas
Respuestas MO, Solución y letra versión 1

Versión 1: "Sea f continua..." C C A C B

Versión 2: "Sea α un numero real..." D D A B D

Versión 3: "Calcular la integral..." D D D A E

Versión 4: "El grado mínimo..." D B B B E

Múltiple opción (Total: 30 puntos)

En cada pregunta hay una sola opción correcta.

Respuesta correcta: 6 puntos **Respuesta incorrecta: -1,5 puntos** **No responde: 0 punto**

Sugerencia: puede ser de utilidad la siguiente tabla

x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\cos x$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
$\operatorname{sen} x$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$

Ejercicio 1.
Sea f continua en $\mathbb{R}$ tal que $1 < f(x) < 2$ $\forall x \geq 5$. Considere las siguientes integrales:

$$\int_5^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2+5}dx \text{ y } \int_5^{+\infty} \frac{f(x)}{x+5}dx.$$

(A) Ambas convergen.

(B) Ambas divergen.

(C) La primera converge y la segunda diverge.

(D) La primera diverge y la segunda converge.

(E) No hay información suficiente para elegir una opción correcta.

Ejercicio 2.
Sea α un número real. Calcular el valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\log(1+x^2) - \operatorname{sen}(x) + x + \frac{x^5}{5!}}{x^\alpha}$$

(A) $-\frac{1}{2}$, si $\alpha = 5$

(B) 0, si $\alpha > 5$

(C) $\frac{7}{6}$, si $\alpha = 3$

(D) $-\frac{1}{3}$, si $\alpha = 3$

(E) no existe el límite si $\alpha \geq 3$

Ejercicio 3.
Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{3x}}{1+e^{2x}}$. El área comprendida entre el eje Ox y la curva $y = f(x)$, con $x \in [0, \log(\sqrt{3})]$, es:

(A) $\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}$ (B) $\log\left(\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{4}$ (C) $1 - \log\left(\sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{2}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}$ (E) $\frac{1}{\log\left(\sqrt{3}\right)} + \frac{\pi}{6}$

Ejercicio 4.
Calcular la integral definida

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$$

(A) $\frac{1}{3} + \frac{\pi}{3} + \log\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

(B) $\frac{1}{3} + \frac{\pi}{12} + \log\left(\frac{7}{\sqrt{2}}\right)$

(C) $\frac{1}{3} + \frac{\pi}{12} + \log\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

(D) $\frac{1}{3} + \frac{\pi}{12} + \log\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$

(E) $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} + \log\left(\frac{12}{\sqrt{2}}\right)$

Ejercicio 5.
El grado mínimo del polinomio de Taylor que aproxima $\operatorname{sen}(1/10)$ con error menor a 10^{-6} es (Sugerencia: $\operatorname{sen} x < x$ $\forall$ $x > 0$):

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6

Segundo parcial - 9 de julio de 2014 Duración: 3 horas
Respuestas MO, Solución y letra versión 1

Desarrollo (Total: 30 puntos) Justificar las respuestas.

Ejercicio 1.
(15 puntos)
Tenemos un cono de altura h y radio en la base r.

1. Sabemos (no se pide demostrar) que el área de revolución engendrada por el giro de la curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, alrededor del eje Ox es:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Calcular el área de la superficie del cono de revolución (sin base) de altura h y radio de la base igual a r.

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h}x\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}dx = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$$

2. Deducir la fórmula del volumen del cuerpo de revolución que resulta de girar la curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, alrededor del eje Ox.

Se tiene que

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Para deducirlo se considera una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$, tal que $lim_{n\to+\infty}|P| = 0$. Para cada intervalo de la $[x_i, x_{i+1}]$ se considera el cilindro de altura $x_{i+1} - x_i$ y radio $f(\bar{x}_i)$, siendo $\bar{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$ y $X = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ un conjunto admisible para la partición P. Dicho cilindro tiene volumen V_i. El volumen del sólido de revolución se calcula como

$$V = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(\bar{x}_i))^2\pi$$

Como $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(f(\bar{x}_i))^2\pi$ es la suma de Riemman $SR(\pi f^2, P, X)$ y la función es continua tenemos que

$$V = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})(f(\bar{x}_i))^2\pi = \lim_{n\to+\infty} SR(\pi f^2, P, X) = \int_a^b \pi f^2$$

3. Calcular el volumen del cono de revolución de altura h y radio de la base igual a r.

Se tiene que

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2dx = \frac{\pi}{3}r^2h$$

4. Una marca famosa de helados está lanzando un nuevo cono helado. El cono debe llevar 50π cm^3 de helado (y no puede sobresalir del cono). El material que se usa para hacer el envoltorio es costoso, por tanto se quiere que el cono tenga la menor superficie posible. Calcular h y r del nuevo cono helado.

$$V = \frac{\pi}{3}r^2h = 50\pi \Rightarrow h = \frac{150}{r^2}$$

Considera la superficie del cono como función de r, luego

$$A(r) = \pi r\sqrt{h^2 + r^2} = \frac{\pi}{r}\sqrt{150^2 + r^6}$$

y buscamos extremos relativos

$$A'(r) = \frac{2\pi r^6 - 150^2\pi}{r^2\sqrt{150^2 + r^6}}$$

y hay un extremos relativo en $r = \sqrt[6]{\frac{150^2}{2}}$, que se puede ver que es un mínimo absoluto estudiando el signo de $A'(r)$, y se obtiene $h = \sqrt[3]{300}$.

Ejercicio 2.
(15 puntos)

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función seccionalmente continua. Considerar la función:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

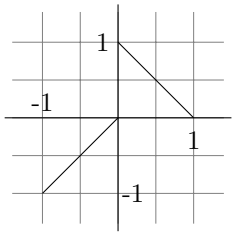
Asumiendo los teoremas del valor medio, demostrar:

a) F es una función continua.

b) Si f es continua en x_0 entonces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.

La demostración está en las notas del curso en la página 93.

2. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función dada por la gráfica, donde $f(0) = 1$:



Hallar la fórmula de $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ para cada $x \in [-1, 1]$.

Observamos que

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \in [-1, 0] \\ -t + 1 & \text{si } t \in (0, 1] \end{cases}$$

Para $x \in [-1, 0]$ se tiene

$$F(x) = \int_{-1}^x t dt = \frac{x^2 - 1}{2}$$

y para $x \in [0, 1]$ se tiene

$$F(x) = \int_{-1}^0 t dt + \int_0^1 (-t + 1)dt = \frac{-x^2 + 2x - 1}{2},$$

de donde

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{2} & \text{si } x \in [-1, 0] \\ \\ \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{2} & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$