Resolución del examen de cálculo 1
18/12/2015

Ejercicios de M.O.

Soluciones M.O.

Ejercicio de números complejos
Opción correcta:A tiene exactamente cuatro elementos distintos, dos de los cuales tienen parte real $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Justificación. Utilizando la ecuación

$$\overline{z} = -z^3$$

obtenemos que

$$|z| = |z|^3$$

y al ser $z \neq 0$ concluimos que $|z| = 1$.
Por otro lado

$$-Arg(z) = 3Arg(z) + \pi + 2k\pi.$$

Por lo tanto, sustituyendo k por $0, 1, 2, 3$, obtenemos los cuatro elementos distintos de A: $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$, $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ y $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Ejercicio de serie geométrica
Opción correcta: $\frac{6}{6+\pi}$.
Justificación. La serie es geométrica de razón $\frac{-\pi}{6}$ por lo tanto converge a $\frac{1}{1-(\frac{-\pi}{6})} = \frac{6}{6+\pi}$.

Ejercicio de serie de un cociente de polinomios
Opción correcta: $\frac{1}{3}$.
Justificación. Utilizando el método de fracciones simples obtenemos que:

$$\frac{1}{n^2 + 7n + 12} = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}$$

por lo tanto la serie es telescópica y converge a $\frac{1}{3}$.

Ejercicio de aplicación de derivada
Opción correcta: $\frac{1}{3\sqrt{3\pi}}$.
Justificación.El área total de la papelera es 1 metro cuadrado, por lo tanto

$$2\pi rh + \pi r^2 = 1,$$

de donde podemos despejar h en función de r, obteniendo que

$$h = \frac{1 - \pi r^2}{2\pi r}.$$

Sustituyendo en la fórmula del volumen se obtiene

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{1 - \pi r^2}{2\pi r} = \frac{r - \pi r^3}{2}.$$

En el valor de r para el cual V es máximo se debe anular la derivada de V con respecto a r. Esto es,

$$V'(r) = \frac{1 - 3\pi r^2}{2} = 0,$$

de donde

$$r = \frac{1}{\sqrt{3\pi}}.$$

Observemos que este es el único punto crítico para $r \in (0, +\infty)$, y además $V''(r) = -3\pi r < 0$, con lo cual el valor de r hallado es un máximo local. Como es el único, y el intervalo es abierto, entonces es un máximo absoluto.
Por último, sustituyendo el r hallado en la fórmula de $V(r)$, obtenemos que el volumen máximo es

$$r\frac{1 - \pi r^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} \frac{1 - \pi \frac{1}{3\pi}}{2} = \frac{1}{3\sqrt{3\pi}}$$

Ejercicio de primitiva
Opción correcta: $\frac{-(x^2+1)^{-41}}{82}$.
Justificación. $(\frac{-(x^2+1)^{-41}}{82})' = \frac{-(x^2+1)^{-42}41}{82} 2x = \frac{x}{(x^2+1)^{42}}$. Otra forma de hacerlo es integrando por sustitución utilizando el cambio de variable $u = x^2 + 1$.

Ejercicio de polinomio de Taylor
Opción correcta: $x - x^3/3$.
Justificación. $f(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0$. Por otro lado, utilizando el teorema fundamental de cálculo, $f'(x) = e^{-x^2}$ y $f'(0) = 1$. Derivando $f'(x)$ obtenemos que $f''(x) = -2xe^{-x^2}$ y $f''(0) = 0$. Por último, derivando nuevamente, $f'''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x)$ y $f'''(0) = -2$. Sustituyendo en la fórmula del polinomio de Taylor nos da $x - x^3/3$.

Ejercicio de aplicación del teorema fundamental
Opción correcta: $f(1) = -e^{-1}$ y $a = 0$.
Justificación. Derivando la igualdad de ambos lados y aplicando el teorema fundamental de cálculo tenemos que

$$f(x^2)2x = e^{-x^2}(-2x)$$

de lo que se deduce que $f(1) = -e^{-1}$. Por otro lado, evaluando la igualdad original en $x = \sqrt{a}$ obtenemos:

$$0 = -1 + e^{-a^2}$$

y por lo tanto $a = 0$.

Ejercicio de cálculo de integrales
Opción correcta: $\frac{\pi}{2}$.
Justificación. Aplicando la fórmula de integración por partes,

$$\int_0^{\pi} (cos(3x))^2 dt = cos(3x)\frac{sen(3x)}{3} \mid_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{sen(3x)}{3}(-sen(3x))3$$

Sustituyendo $(sen(3x))^2$ por $1 - (cos(3x))^2$ y despejando obtenemos que

$$\int_0^{\pi} (cos(3x))^2 dt = \frac{\pi}{2}.$$

Ejercicio de integrales impropias
Opción correcta: $\alpha \in (0, 1)$.
Justificación. En primer lugar,

$$\int_0^{+\infty} f(x) = \int_0^1 f(x) + \int_1^{+\infty} f(x).$$

La primera integral converge si $\alpha < 1$ ya que se comporta como $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$. La segunda integral converge para $\alpha > 0$ ya que es comporta como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}$. En conclusión, la integral impropia converge si y solo si $\alpha \in (0, 1)$.

versión 1

Se considera la función definida por $f(x) = \frac{1}{x^\alpha\sqrt{x^2+1}}$...

1	2	3	4	5	6	7	8	9
D	C	C	A	D	D	A	B	B

versión 2

El valor de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$ es...

1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	A	B	C	C	E	B	A	E

versión 3

El polinomio de Taylor de grado 3 en el punto $a = 0$...

1	2	3	4	5	6	7	8	9
B	E	A	B	D	B	E	A	D

versión 4

Una primitiva de la función $\frac{x}{(x^2+1)^{42}}$ es...

1	2	3	4	5	6	7	8	9
D	C	E	E	D	C	A	A	A

Desarrollo

Ejercicio 1. Ver teórico, Definición 219 y Teorema 32, pág 92.

Ejercicio 2. Ver teórico, Teorema 33, pág 93.