Segundo parcial - 6 de julio de 2013 - Respuestas

La versión se identifica por la letra del primer ejercicio MO.

1. Versión 1: "Sea $f(x) = 2\log(\cos x) + x^2$ ..."
   Repuestas: E E D A

2. Versión 2: "Indicar el valor de:
$$\int_0^1 \frac{x}{x^3+x^2+x+1}dx."$$
   Respuestas: A B E E

3. Versión 3: "Se considera el segmento de la recta $y = ax + b$ ..."
   Respuestas: B A C B

4. Versión 4: "Se considera la integral:
$$\int_0^{+\infty} (x^3+3x)e^{-x^2}dx."$$
   Respuestas: B E E D

Solución Desarrollo

Ejercicio 1.
(15 puntos)
Sean I un intervalo, y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua.

1. Definir "primitiva de f en I".

2. Sea $x_0 \in I$, y sea $F : I \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$. Probar la siguiente afirmación del Teorema Fundamental del Cálculo: F es derivable en I y $F'(x) = f(x)$.

3. Sea J otro intervalo y $g : J \to I$ derivable. Se define $H : J \to \mathbb{R}$ por $H(x) = \int_{x_0}^{g(x)} f(t)dt$. Probar que H es derivable, y expresar su derivada en términos de f y g.

4. Sea $H : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $H(x) = \int_0^{x^3} \log\left((t+1)(1-t)\right) dt$. Hallar su derivada.

Solución:

1. F es primitiva de f en I si $F'(x) = f(x)\ \forall\ x \in I$.

2. $F(x+h) - F(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^{x} f = \int_{x}^{x+h} f$. Por el Teorema del Valor Medio $\displaystyle\int_{x}^{x+h} f = hf(c)$, donde c es un punto entre x y $x+h$. Entonces
$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x),$$
   por ser f continua.

3. $H(x+h) - H(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{g(x+h)} f - \int_{x_0}^{g(x)} f = \int_{g(x)}^{g(x+h)} f$. Por el Teorema del Valor Medio
$$\int_{g(x)}^{g(x+h)} f = (g(x+h) - g(x))f(d),$$

donde d es un punto entre x y $x+h$. Entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{H(x+h)-H(x)}{h}=\lim_{h\to 0}=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}f(d)=g'(x)f(x),$$

por ser g derivable y f continua.
Se puede hacer escribiendo $H(x)=F(g(x))$ y aplicando la regla de la cadena: como F y g son derivables entonces $F\circ g$ es derivable y $H'(x)=F'(g(x))g'(x)$.+-

4. $H'(x)=3x^2\log(x^3+1)(1-x^3)$.

Ejercicio 2.
(15 puntos)

1. Sea $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}^+$ una función continua y monótona decreciente y supongamos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)$ converge a S. Sea $S_k=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}f(i)$. Demostrar que:

$$S-S_k<\int_k^{+\infty}f(t)dt,\ \ \forall k\in\mathbb{Z}^+.$$

2. Sea $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$. Utilizando la parte anterior indicar cuántos términos hay que sumar para que el error al calcular S sea menor que $\dfrac{1}{20000}$.

Solución:

1. $S-S_k=\displaystyle\sum_{n=k+1}^{+\infty}f(n)$.
   $f(n)<f(x)\ \forall\ x\in[n-1,n)$, entonces $f(n)<\displaystyle\int_{n-1}^{n}f(x)dx$.
   Entonces $\displaystyle\sum_{n=k+1}^{H}f(n)<\sum_{n=k+1}^{H}\int_{n-1}^{n}f(x)dx=\int_k^H f(x)dx$.
   $S-S_k=\displaystyle\lim_{H\to+\infty}\sum_{n=k+1}^{H}f(n)<\lim_{H\to 0}\int_k^H f(x)dx=\int_k^{+\infty}f(x)dx$.

2. Error $=S-S_k<\displaystyle\int_k^{+\infty}\frac{dt}{t^3}=-\frac{1}{2}t^{-2}=\frac{1}{2k^2}=\frac{1}{20000}$, de donde $k^2=10000$ y $k=100$.