EXAMEN - 3 DE AGOSTO DE 2013 DURACIÓN: 3 HORAS Y MEDIA

Soluciones Múltiple opción (Total: 50 puntos)

En cada pregunta hay una sola opción correcta.

Respuesta correcta: 10 puntos **Respuesta incorrecta: -2,5 punto** **No responde: 0 punto**

Versión 1: "Sea la sucesión..." D A D D A
Versión 2: "Se considera la función..." E B E B B
Versión 3: "Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$..." A E A E A
Versión 4: "Se considera el límite..." A A D A D

Desarrollo (Total: 50 puntos) Justificar las respuestas.

Ejercicio 1.
(25 puntos)

1. Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable y tiene un extremo relativo en a entonces $f'(a) = 0$.

   Supongamos que $f'(a) > 0$ entonces $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$ para todo $x \in E(a, \delta)$. Entonces $f(x) - f(a)$ y $x - a$ tienen el mismo signo. Entonces si $x \in (a - \delta, a)$ se cumple $f(x) - f(a) < 0$, es decir $f(x) < f(a)$ y para $x \in (a, a + \delta)$ se cumple $f(x) - f(a) > 0$, es decir $f(x) > f(a)$, entonces f no tiene un extremo relativo en a. Análogamente se prueba si $f'(a) < 0$.

2. Usar la parte anterior y el Teorema de Weierstrass para demostrar el siguiente Teorema de Rolle: sea f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

   Por el Teorema de Weierstrass, como f continua en $[a, b]$, entonces f tiene máximo y mínimo en $[a, b]$.

   Si ambos ocurren en los extremos del intervalo, como $f(a) = f(b)$ sería $m = M$ y la función sería constante en $[a, b]$,y por lo tanto $f'(c) = 0$ para todo $c \in (a, b)$.

   Supongamos que al menos uno de ellos (por ejemplo el máximo) se da en (a, b), entonces f tiene un extremo relativo en c ($f(c) = M$) y $f'(c) = 0$.

3. Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua tal que $\int_0^2 f(t)dt = \int_0^3 f(t)dt$. Probar usando el Teorema de Rolle que existe $c \in [2, 3]$ tal que $f(c) = 0$.
   Sugerencia: considerar $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

   Sea $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Entonces $F(2) = F(3)$, y por el Teorema Fundamental del Cálculo F es continua en $[2, 3]$ y derivable en $(2, 3)$ (es continua en $[0, +\infty)$ y derivable en $(0, +\infty)$). Por el Teorema de Rolle existe $c \in (2, 3)$ tal que $F'(c) = 0$. Como $F'(c) = f(c)$ entonces $f(c) = 0$.

Ejercicio 2.
(25 puntos)

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función positiva y continua.

   a) Enunciar la fórmula del volumen $V(a, b)$ del sólido de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función f alrededor del eje Ox, con $x \in [a, b]$.

   $V(a, b) = \int_a^b \pi f(x)^2 dx$.

   b) Enunciar la fórmula del área $A(a, b)$ determinada entre la recta $x = a$, la recta $x = b$, el eje Ox y la gráfica de la función f.

   $A(a, b) = \int_a^b f(x)dx$.

2. Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función positiva y continua. Se define el volumen $V(1, +\infty)$ del sólido de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función f alrededor del eje Ox, con $x \in [1, +\infty)$ mediante $\lim_{b\to+\infty} V(1, b)$. Se define análogamente el área $A(1, +\infty)$ entre la recta $x = 1$, el eje Ox y la gráfica de la función f.

   a) Mostrar un ejemplo donde el volumen $V(1, +\infty)$ es finito, pero el área $A(1, +\infty)$ no es finita.

   Consideramos la función $f(t) = \frac{1}{t}$. Por integral armónica el área $A(1, +\infty) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ es infinita pero el volumen $V(1, +\infty) = \int_1^{+\infty} \pi \frac{1}{t^2} dt$ es finito.

   b) Probar que si $f(x) < 1$ para toda $x \in [1, +\infty)$ y el área determinada entre la recta $x = 1$, el eje Ox y la gráfica de la función f es finita, entonces el volumen de revolución obtenido al girar f respecto al eje Ox debe ser finito.

   Como $0 \leq f(x) < 1$ se tiene que $f(t)^2 < f(t)$. Luego usando el criterio de comparación para integrales impropias, si $A(1, +\infty) = \int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge, entonces $\int_1^{+\infty} f(t)^2 dt$ converge y $V(1, +\infty) = \int_1^{+\infty} \pi f(t)^2 dt$ es finito.