Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

SEGUNDO PARCIAL - 30 DE NOVIEMBRE DE 2013

Respuestas de los ejercicios de desarrollo

Ejercicio 1 c).

$$\int_0^1 t^{-\alpha} e^{-\frac{1}{t}} dt$$

Una manera.

Observamos que $\lim_{t\to 0^+} t^{-\alpha} e^{-\frac{1}{t}} = 0$ ya que por órdenes $e^{-\frac{1}{t}}$ tiende a 0 mucho más rápido que $t^{-\alpha}$ para cualquier valor de α. Por lo tanto, la integral en realidad no es impropia y converge para todo α.

(Como $\lim_{t\to 0^+} t^{-\alpha} e^{-\frac{1}{t}} = 0$ para todo valor de α, entonces para todo α y todo $\beta \in \mathbb{R}$ existe un t_0 de modo que para todo $t > t_0$ se tiene: $t^{-\alpha} e^{-\frac{1}{t}} < \frac{1}{t^\beta}$. Entonces en particular podemos escoger $\beta = \frac{1}{2}$ y como $\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}\, dt$ converge, entonces converge la integral inicial.)

Otra manera.

Usando el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ la integral pasa a ser la integral impropia de primera especie:

$$\int_1^{+\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} dx.$$

Tenemos que $\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} = 0$ para todo valor de α (por órdenes), entonces para todo α y todo $\beta \in \mathbb{R}$ existe un x_0 de modo que para todo $x > x_0$ se tiene: $x^{\alpha-2} e^{-x} < \frac{1}{x^\beta}$. Entonces en particular podemos escoger $\beta = 2$ y como $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge, entonces converge la integral inicial.

Ejercicio 2 c).

La derivada de

$$f(x) = \int_{-\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x}} \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\, dy$$

se calcula por el Teorema Funadmental (aplicado a la función compuesta). Si $F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt$, entonces:

$$F'(x) = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x).$$

Por lo tanto para la función f dada arriba se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \sqrt{\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}}\,\frac{1}{x^2} \\ &= \left(-\frac{1}{x^2}\right)\left[\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} + \sqrt{\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}}\,\right] \\ &= \frac{-2}{x\sqrt{x^2-1}}. \end{aligned}$$