Examen - 17 de diciembre de 2013

Respuesta de los Ejercicios Múltiple Opción

Múltiple opción (Total: 50 puntos)

La versión se identifica por la letra del primer ejercicio de múltiple opción.

Versión 1. "Se considera el conjunto $A \subset \mathbb{C}$..." Respuestas: B, A, B, C, E.

Versión 2. "Calcular el siguiente límite..." Respuestas: C, A, D, B, C.

Versión 3. "Sea $I = \int_1^{e^a} \frac{\ln^2(x)}{x^2} dx$" Respuestas: C, D, E, B, D.

Versión 4. "Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$..." Respuestas: C, E, E, D, A.

Examen - 17 de diciembre de 2013

Esquema de Solución Desarrollo

Ejercicio 1 **(Común)** *Se consideran las siguientes funciones definidas en los reales positivos:*

$$F(x) = \arctan x - \frac{x}{x^2+1} \quad y \quad G(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x^2}{x^2+1}} \sqrt{\frac{t}{1-t}}\, dt$$

1. *Muestre que F y G son primitivas de $f(x) = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}$.*

   Derivamos F y derivamos G usando el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-1+x^2}{(x^2+1)^2} = f(x) \\ G'(x) &= \sqrt{\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)' = \sqrt{x^2}\left(\frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2}\right) = f(x) \end{aligned}$$

2. *Demuestre que existe un punto $x_0 \in (0,1)$ tal que $f(x_0) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$.*

   Una forma:

   f es una función continua en $[0,1]$, entonces por el Teorema del Valor Medio existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $\int_0^1 f(t)dt = f(x_0)$. Además, como F es primitiva de f, usando la regla de Barrow, $\int_0^1 f(t)dt = F(1) - F(0) = \arctan(1) - \frac{1}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. De lo anterior existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $f(x_0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

   Otra forma:

   Como F es derivable en $(0,1)$, por el Teorema de Lagrange existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $\dfrac{F(1)-F(0)}{1-0} = F'(x_0) = f(x_0)$, y como $F(1) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$ y $F(0) = 0$, se tiene que $f(x_0) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$.

3. *Halle la función $H(x) = F(x) - G(x)$. (Sugerencia: usar la parte (a).)*

   Como F y G son dos primitivas de la misma función, difieren en una constante de donde $H(x)$ es constante. En particular, $H(x) = H(1) = F(1) - G(1)$. Como $G(1) = \displaystyle\int_{1/2}^{1/2} \sqrt{\frac{t}{1-t}}dt = 0$ tenemos que

$$H(x) = F(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Examen - 17 de diciembre de 2013

Esquema de Solución Desarrollo

Ejercicio 2 (Solo primer semestre)

Sea $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$.

1. *Deducir la fórmula de volumen de un cuerpo obtenido al girar la gráfica de $f(x)$ alrededor del eje Ox.*

   Consideramos una partición equiespaciada $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, con $x_i = a + i/n$, del intervalo $[a, b]$. Aproximamos el volumen que se obtiene al girar la gráfica de $f(x)$ alrededor del eje Ox mediante la suma de los volúmenes de los cilindros de radio $f(x_i)$ y altura $x_{i+1} - x_i$, es decir que aproximamos el volumen por $V_n = \sum_{i=0}^{n} \pi f(x_i)^2 (x_{i+1} - x_i)$. Como la función f^2 es continua tenemos que V_n es una suma de Riemann $V_n = SR(\pi f^2, P, X_P)$, con $\bar{x}_i = x_i$, de donde el volumen es

$$V_x = \lim_{n \to +\infty} V_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n} \pi f(x_i)^2 (x_{i+1} - x_i) = \int_a^b \pi f(t)^2 dt.$$

2. *Deducir la fórmula de volumen de un cuerpo obtenido al girar la gráfica de $f(x)$ alrededor del eje Oy.*

   Ver páginas 109 y 110 de las notas del curso, para deducir que

$$V_y = \int_a^b 2\pi t f(t) dt.$$

3. *Consideramos V_x y V_y, los volúmenes de revolución con respecto a los ejes Ox y Oy respectivamente, de la función $f(x) = xe^x$ en el intervalo $[a, b]$.*

   Demuestre que $2V_x - V_y > 0$.

$$2V_x - V_y = \int_a^b 2\pi \left(te^t\right)^2 dt - \int_a^b 2\pi t \left(te^t\right) dt = 2\pi \int_a^b t^2 e^t \left(e^t - 1\right) dt$$

   Si $a, b > 0$, entonces $e^t - 1 > 0$, y por propiedades de la integral $2\pi \int_a^b t^2 e^t \left(e^t - 1\right) dt > 0$.

Examen - 17 de diciembre de 2013

Esquema de Solución Desarrollo

Ejercicio 3 (Solo segundo semestre)

Sea la ecuación diferencial $y'' + py' + qy = 0$, donde p, q son constantes en $\mathbb{R}$. Llamaremos $y(x)$ a su solución general.

1. *¿Qué condiciones deben cumplir p y q para que $y(x)$ esté acotada en $[0, +\infty)$?*

   Calculamos el polinomio característico $\lambda^2 + p\lambda + q$, que tiene raíces $\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$.

   Si el discriminante $p^2 - 4q > 0$, se tienen dos raíces reales distintas, λ_1 y λ_2, y la solución es de la forma $Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$. La solución está acotada en $[0, +\infty)$ si $\lambda_1, \lambda_2 \leq 0$, para lo que se tiene que cumplir $p \geq 0$, $q \geq 0$, además de $p^2 - 4q > 0$.

   Si el discriminante $p^2 - 4q = 0$, se tienen una raíz doble, $\lambda_1 = -p/2$ y la solución es de la forma $Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t}$. La solución está acotada en $[0, +\infty)$ si $\lambda_1 < 0$, es decir $p > 0$, $p^2 = 4q$.

   Si el discriminante $p^2 - 4q < 0$, se tienen 2 raíces complejas, $\lambda_1 = a + bi$ y $\lambda_2 = a - bi$ y la solución es de la forma $Ae^{at}\cos(bt) + Be^{at}\text{sen}(bt)$. La solución está acotada en $[0, +\infty)$ si $a = -p/2 \leq 0$. Tiene que ser $p^2 < 4q$ y $p \geq 0$.

   De modo que si $p \geq 0$ y no son 0 al mismo tiempo p y q las soluciones están acotadas en $[0, +\infty)$.

2. *Idem para que exista el límite* $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

   El límite $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ no existe si se tienen raíces complejas con parte real mayor o igual que 0, ya que para $a \geq 0$, los términos de la forma $e^{at}\cos t$ y $e^{at}\text{sen}(bt)$ no tienen límite. Es decir que tiene que ser $p^2 - 4q \geq 0$ o $p^2 - 4q < 0$ y $p > 0$.

3. *Halle la solución particular para la siguiente ecuación diferencial:*

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$$

   El polinomio característico es $\lambda^2 + 4$, y tiene raíces complejas simples $2i$ y $-2i$, por lo que la solución de la ecuación homogénea es de la forma

$$A\cos(2x) + B\text{sen}(2x).$$

   Además la función nula es una solución particular. Con las condiciones iniciales tenemos $y(0) = A = 1$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = B = 1$ y la solución es

$$y(x) = \cos(2x) + \text{sen}(2x).$$