Resolución del segundo parcial de cálculo 1
5/12/2014

Ejercicios de M.O.

Ejercicio Sea $f(x) = (x-1)^3 + e^{-2x} - x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + ax^2 + bx^3}{x^4} = \frac{2}{3}$$

Entonces, f presenta en $x = 0$ un
respuesta: máximo relativo y $a = 1$ y $b = \frac{1}{3}$

Ejercicio Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continua tal que, $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_e^{e^x} f(t)\,dt = x^4 + \lambda$$

Entonces:
respuesta: $\lambda = -1$ y $f(e) = \frac{4}{e}$

Ejercicio Si $f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \frac{2t-3}{(t^2+4)(t+1)}$, sean

$$\text{(I)} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \quad \text{y} \quad \text{(II)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

Entonces:
respuesta: Solo (I) converge y converge a $\frac{\pi}{4} - \log 2$

Ejercicio Sean $f(x) = x - x^2$ y $g(x) = ax$. Un valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual el área de la región comprendida entre los gráficos de f y g vale $\frac{9}{2}$ es:
respuesta: -2

Ejercicio El valor de la integral definida,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x)\sqrt{4 - \operatorname{sen}(2x)}\,dx$$

es:
respuesta: $\frac{8}{3} - \sqrt{3}$

Ejercicio de desarrollo

Ejercicio 1. a) Ver teórico.

b) i) Consideremos las siguientes funciones auxiliares definidas para $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt \quad \text{y} \quad \alpha(x) = e^x$$

Como consecuencia del teorema fundamental (parte anterior) la función F es derivable y $F' = f$ y es claro que α es también una función derivable. Observar que $G(x) = F(\alpha(x)) = (F \circ \alpha)(x)$ por lo tanto G es derivable (por ser composición de funciones derivables) y debido a la regla de la cadena,

$$G'(x) = F'(\alpha(x))\alpha'(x) = f(\alpha(x))\alpha'(x) = \frac{\log(e^x)}{e^{2x}}e^x = \frac{x}{e^x}$$

.

ii) $G'(x) = 0$ si y solo si $x = 0$. Si hacemos el estudio de signo de G' es fácil ver que $x = 0$ es un mínimo absoluto de G. Luego concluimos que G decreciente para $x < 0$ y creciente para $x > 0$.

iii) Aplicamos método de integración por partes para calcular $G(x)$, para $x \in \mathbb{R}$, derivamos la función $\log(t)$, cuya derivada es $\frac{1}{t}$ y buscamos una primitiva de $\frac{1}{t^2}$, $-\frac{1}{t}$. Luego,

$$G(x) = -\frac{1}{e^x}\log(e^x) - \frac{1}{e^x} + 1 = \frac{-1-x}{e^x} + 1$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1-x}{e^x} + 1 = 1$$

.