Resolución del examen de febrero de cálculo 1
23/2/2015

Ejercicios de M.O.

versión 1

Se considera el polinomio complejo P(z):...

1	2	3	4	5	6
A	B	B	B	A	D

versión 2

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ las sucesiones definidas por recurrencia...

1	2	3	4	5	6
D	C	E	D	E	D

versión 3

La integral definida...

1	2	3	4	5	6
C	D	D	C	A	C

versión 4

Si f continua verifica que...

1	2	3	4	5	6
D	A	D	A	B	A

Desarrollo

Ejercicio 1. a. Ver teórico.

b. Para hallar una primitiva de $\frac{\log(senx)}{tanx}$ podemos utilizar la fórmula de sustitución con $u = senx$:

$$\int \frac{\log(senx)}{tanx}dx = \int \frac{\log(senx)}{senx}(cosx)dx = \int \frac{\log(u)}{u}du.$$

Utilizando nuevamente sustitución con $t = \log(u)$ llegamos a que:

$$\int \frac{\log(senx)}{tanx}dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} = \frac{\log^2(senx)}{2}.$$

Luego verificamos:

$$(\frac{\log^2(senx)}{2})' = \log(senx)\frac{1}{senx}(cosx) = \frac{\log(senx)}{tanx}$$

.

c. Por definición de integral impropa de segunda especie tenemos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(senx)}{tanx}dx = \lim_{t\to 0}\int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(senx)}{tanx}dx.$$

Utilizando la primitiva hallada en la parte anterior:

$$\lim_{t\to 0}\int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(senx)}{tanx}dx = \lim_{t\to 0}\frac{\log^2(senx)}{2}\ |_t^{\frac{\pi}{2}} = -\infty$$

y la integral diverge.

Ejercicio 2. a. Ver teórico.

b. Ver teórico.

c. Clasifiquemos la serie $\sum(-1)^n/n^\alpha$ para los distintos α:

- $\alpha = -1$: en este caso tenemos que $(-1)^n/n^\alpha$ no tiende a cero y por lo tanto no cumple con la condición necesaria (pero no suficiente) de convergencia. No converge ni converge absolutamente.
- $\alpha = 3/4$: en este caso la serie no converge absolutamente ya que $\sum \mid (-1)^n/n^{3/4} \mid = \sum 1/n^{3/4}$ y $3/4 < 1$ pero si converge utilizando el criterio de Leibnitz.
- $\alpha = 5/2$: en este último caso la convergencia es absoluta ya que $\sum \mid (-1)^n/n^{5/2} \mid = \sum 1/n^{5/2}$ y $5/2 > 1$, o sea, converge y converge absolutamente.