Resolución del ejercicio de desarrollo

1. **Formular y probar el teorema de Bolzano.**: Ver en el libro.

2. **Probar que la ecuación $x^2(\frac{x^2}{4}-1) = -\ln(x)$ tiene una única solución en el intervalo $(1,2)$.**
   Sea $f(x) = x^2(\frac{x^2}{4} - 1) + \ln(x)$, probaremos que f tiene una única raíz en el intervalo $(1,2)$. La función f es continua en el intervalo $[1,2]$ por ser suma de continuas.
   Además $f(1) = -\frac{3}{4} < 0$ y $f(2) = \ln(2) > 0$, por lo que Bolzano asegura la existencia de al menos un $c \in (1,2)$ donde f vale 0.
   Para ello estudiaremos la monotonía de f. Veremos el signo de f' en $(1,2)$.
   $f'(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{x} = \frac{x^4-2x^2+1}{x}$, como el denominador es positivo en $(1,2)$, alcanza con estudiar el signo del numerador. Vemos que $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2$ que es positivo en $(1,2)$.
   Entonces $f' > 0$ en $(1,2)$ y f es estrictamente creciente, lo que prueba la unicidad de la raíz.

3. **Sea $g(x)$ la función inversa de f en $(0,+\infty)$. Calcule (si existe) $g'(f(1))$. Justifique.**
   Por la regla de la derivada de la función inversa, de existir $g'(f(x))$ debe estar dada por $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(g(f(x)))} = \frac{1}{f'(x)}$. En este caso como $f(1) = \frac{-3}{4}$, tenemos que $g'(\frac{-3}{4}) = \frac{1}{f'(1)}$. Pero $f'(1) = 0$, de donde no existe $g'(f(1))$.