Cálculo I

2do semestre de 2016

Solución del segundo parcial

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 12 puntos)

Ejercicio 1 Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión real tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Solución: Falso Contraejemplo: la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(n+1)$ diverge, aunque su término general $a_n = 1/(n+1)$ tienda a cero cuando n tiende a ∞. (Aquí, tomamos $a_n = 1/(n+1)$ en lugar de $a_n = 1/n$ para evitar el problema de definición para $n = 0$.)

Ejercicio 2 Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones positivas tales que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$, entonces las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ son de misma clase (ambas convergen o ambas divergen).

Solución: Verdadero (Teorema del curso)

Ejercicio 3 Sea $[a, b]$ un intervalo dado con una subdivisión $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ $(n \geq 1)$. Si una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en cada subintervalo $(x_k, x_{k+1}) \subset [a, b]$ (para todo $0 \leq k < n$), entonces la función f es integrable en el intervalo $[a, b]$.

Solución: Falso Contraejemplo: se considera el intervalo $[a, b] = [0, 1]$ equipado con la subdivisión trivial definida por: $n = 1$, $x_0 = a = 0$ y $x_1 = b = 1$. La función $f(x) = 1/x$ es continua en el intervalo $(0, 1)$, pero no es integrable en $[a, b] = [0, 1]$.

Ejercicio 4 La función $G(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(2x)} e^{t^2} \cos(t)\, dt$ es derivable en $x = 0$ y vale $G'(0) = 2$.

Solución: Verdadero Se observa que que $G(x) = F(\operatorname{sen}(2x))$, donde $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} e^{t^2} \cos(t)\, dt$. Por el teorema fundamental del cálculo, tenemos que $F'(x) = e^{x^2} \cos(x)$, y por la regla de la cadena, se deduce que:

$$\begin{aligned} G'(x) &= (F(\operatorname{sen}(2x)))' = (\operatorname{sen}(2x))' \cdot F'(\operatorname{sen}(2x)) \\ &= 2\cos(2x) \cdot e^{\operatorname{sen}^2(2x)} \cos(\operatorname{sen}(2x)) \end{aligned}$$

De tal modo que: $G'(0) = 2\cos(0)e^{\operatorname{sen}^2(0)} \cos(\operatorname{sen}(0)) = 2 \cdot e^0 \cdot \cos(0) = 2$.

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 18 puntos)

Ejercicio 1 El desarrollo de Taylor de orden 3 de $f(x) = \cos(x)\log(1+x) - 3x + 7$ en $x = 0$ es...

Solución: Desarrollando las funciones involucradas al orden 3 en $x = 0$, tenemos que:

- $\cos(x) \;=\; 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ (desarrollo de $\cos(x)$)
- $\log(1+x) \;=\; x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ (desarrollo de $\log(1+x)$)
- $\cos(x)\log(1+x) \;=\; \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + o(x^3)$ (desarrollo del producto)
  $= x - \frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)x^3 + o(x^3)$
  $= x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$
- $\cos(x)\log(1+x) - 3x + 7 = (x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3) + (7 - 3x) + o(x^3)$ (desarrollo de la suma)
  $= 7 - 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

Entonces: $\boxed{f(x) = 7 - 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$

Observación: También se puede calcular las derivadas iteradas f', f'' y $f^{(3)}$ a partir de la definición de f, y concluir con la fórmula:

$$f(x) \;=\; f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2}\cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}\cdot x^3 + o(x^3)$$

(Tal estrategia necesita hacer mucho más cuentas, pero lleva al mismo resultado.)

Ejercicio 2 Sean m el mínimo y M el máximo de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-1, \frac{1}{2}]$. Entonces $M + m$ es igual a...

Solución: La derivada de la función f es dada por

$$f'(x) \;=\; \frac{1\cdot(x^2+1) - (x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} \;=\; \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$$

Como $(x^2+1)^2 > 0$, $f'(x)$ tiene mismo signo que el polinomio $-x^2 - 2x + 1$, cuyas raíces son

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 - \sqrt{2} \approx -2,414 && \text{(afuera del intervalo } [-1, \tfrac{1}{2}]) \\ x_1 &= -1 + \sqrt{2} \approx 0,414 && \text{(adentro del intervalo } [-1, \tfrac{1}{2}]) \end{aligned}$$

Así, el signo de $p(x) = -x^2 - 2x + 1$ es dado por:

x	$-\infty$		x_0		-1		x_1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$p(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	

Restringiendo el estudio al intervalo $[-1, \frac{1}{2}]$, se deduce que:

- $f'(x) > 0$ en $[-1, x_0)$: la función f es creciente.
- $f'(x_1) = 0$: f tiene máximo local en x_1.
- $f'(x) < 0$ en $(x_0, \frac{1}{2}]$: la función f es decreciente.

Así, el máximo M y el mínimo m de f en $[-1, \frac{1}{2}]$ son dados por:

- $M = f(x_1) = \dfrac{(\sqrt{2}-1)+1}{(\sqrt{2}-1)^2+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(4+2\sqrt{2})}{(4-2\sqrt{2})(4+2\sqrt{2})} = \dfrac{4+4\sqrt{2}}{8} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$
- $m = \text{mín}\Big(f(-1), f(\frac{1}{2})\Big) = \text{mín}\big(0, \frac{6}{5}\big) = 0$

De tal modo que: $\boxed{M + m = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$

Ejercicio 3 La integral $\displaystyle\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\cos^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ vale...

Solución: A través del cambio de variable $u = \sqrt{x}$ (con $du = dx/2\sqrt{x}$), tenemos que:

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\cos^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx \;=\; \int_{\pi}^{2\pi} 2\cos^2(u)\, du$$

Observando que $\cos(2u) = \cos^2(u) - \text{sen}^2(u) = 2\cos^2(u) - 1$, se deduce que:

$$\int_{\pi}^{2\pi} 2\cos^2(u)\, du \;=\; \int_{\pi}^{2\pi} (\cos(2u)+1)\, du \;=\; \Big[\frac{1}{2}\text{sen}(2u) + u\Big]_{\pi}^{2\pi} \;=\; 2\pi - \pi \;=\; \pi\,.$$

Luego: $\boxed{\displaystyle\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\cos^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx \;=\; \pi}$

El cálculo se puede realizar sin necesidad de usar la igualdad trigonométrica $\cos(2u) = \cos^2(u) - \text{sen}^2(u)$.
Aplicando el método de partes con las funciones $f(u) = \cos(u)$ y $g'(u) = \cos(u)$ se tiene que

$$\int_{\pi}^{2\pi} 2\cos^2(u)\, du \;=\; 2\Big[\sin(u)\cos(u)\Big]_{\pi}^{2\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} 2\sin^2(u)\, du \;=\; \int_{\pi}^{2\pi} 2(1-\cos^2(u))\, du$$

de donde $\int_{\pi}^{2\pi} 2\cos^2(u)\, du = \int_{\pi}^{2\pi} 1\, du$ se puede concluir entonces que $\int_{\pi}^{2\pi} 2\cos^2(u)\, du \;=\; \pi$

Primer ejercicio de desarrollo (Total: 10 puntos)

1. Dado una función continua $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, definir las nociones de convergencia / divergencia / oscilación para la integral impropia $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$.

Solución: véase las notas del curso.

2. Determinar si la integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+3}$ converge, diverge u oscila (justificando la respuesta), y en caso de convergencia, calcular su valor.

Solución: Sea $f(x) = 1/(x^2+4x+3)$. Se observa que la función f es definida y continua en $[0,+\infty)$; así la integral impropia $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ es de primera especie. Además, tenemos que $f(x) \sim 1/x^2$ cuando $x \to +\infty$, lo que implica que dicha integral impropia converge.

Para integrar la fracción racional $f(x) = 1/(x^2+4x+3)$, la descomponemos en fracciones simples. Factorizando el denominador, se obtiene que $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$. Así tenemos dos raíces reales simples -1 y -3, lo que implica que

$$f(x) \;=\; \frac{1}{(x+1)(x+3)} \;=\; \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$$

para algunos coeficientes $A, B \in \mathbb{R}$, que se trata de determinar.

Multiplicando la igualdad anterior por el denominador $(x+1)(x+3)$, se deduce la igualdad polinomial $1 = A(x+3) + B(x+1) = (A+B)x + (3A+B)$, que equivale al sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} A+B &=& 0 \\ 3A+B &=& 1 \end{array}\right. \qquad \text{cuyas soluciones son:} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} A &=& \frac{1}{2} \\ B &=& -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Luego: $\boxed{\dfrac{1}{x^3+4x+3} \;=\; \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+3}\right)}$ Así, para todo $a > 0$, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^2+4x+3} &=& \displaystyle\frac{1}{2}\left(\int_0^a \frac{dx}{x+1} - \int_0^a \frac{dx}{x+3}\right) \\ &=& \displaystyle\frac{1}{2}\Big(\big[\log(x+1)\big]_{x=0}^{x=a} - \big[\log(x+3)\big]_{x=0}^{x=a}\Big) \\ &=& \displaystyle\frac{1}{2}\big((\log(a+1) - \log(1)) - (\log(a+3) - \log(3))\big) \\ &=& \displaystyle\frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{a+1}{a+3}\right) + \log(3)\right) \\ &\to& \displaystyle\frac{1}{2}\big(\log(1) + \log(3)\big) \;=\; \frac{\log(3)}{2} \qquad \text{cuando } \; a \to +\infty \end{array}$$

Luego: $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+3} \;=\; \frac{\log(3)}{2}}$

Segundo ejercicio de desarrollo (Total: 20 puntos)

Se considera la función $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = 1/(1+t^2)$.

1. Acotación de f: Demostrar que $0 < f(t) \leq 1$ para todo $t \geq 0$.

Solución: Como $0 < 1 \leq 1+t^2$ para todo $t \geq 0$, tenemos que $0 < 1/(1+t^2) \leq 1$, es decir: $0 < f(t) \leq 1$ para todo $t \geq 0$. (Aquí utilizamos la propiedad: $0 < x \leq y \;\Rightarrow\; 0 < 1/y \leq 1/x$.)

2. Paso de desarrollo: Demostrar que $f(t) = 1 - t^2 f(t)$ para todo $t \geq 0$.

Solución: Como $f(t) = 1/(1+t^2)$, tenemos que $(1+t^2)f(t) = 1$, entonces $f(t) + t^2 f(t) = 1$, es decir: $f(t) = 1 - t^2 f(t)$.

3. Desarrollo de f: Con la igualdad anterior, demostrar por inducción completa que

$$f(t) \;=\; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} \;+\; (-1)^{n+1}t^{2n+2}f(t) \qquad\qquad (\text{para todos } n \in \mathbb{N} \text{ y } t \geq 0)$$

Observación: Para entender de donde sale la igualdad que se trata de demostrar, se observa que la relación establecida en el ítem 2 se puede iterar del modo siguiente:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - t^2 f(t) \\ &= 1 - t^2(1 - t^2 f(t)) \;=\; 1 - t^2 + t^4 f(t) \\ &= 1 - t^2 + t^4(1 - t^2 f(t)) \;=\; 1 - t^2 + t^4 - t^6 f(t) \\ &= 1 - t^2 + t^4 - t^6(1 - t^2 f(t)) \;=\; 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 f(t) \\ &= \text{etc.} \end{aligned}$$

Así, después de n iteraciones, se deduce que

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + (-1)^{n+1}t^{2n+2}f(t) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} \;+\; (-1)^{n+1}t^{2n+2}f(t) \end{aligned}$$

Formalmente, esta relación se demuestra por inducción sobre n.

Solución:

- Caso de base: cuando $n = 0$, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} \;+\; (-1)^{n+1}t^{2n+2}f(t) \;=\; 1 - t^2 f(t) \;=\; f(t) \qquad\qquad (\text{por } 2.)$$

- Paso de inducción: Supongamos que la propiedad se cumpla para algún $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis de inducción, tenemos que

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} \;+\; (-1)^{n+1}t^{2n+2}f(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} \;+\; (-1)^{n+1}t^{2n+2}(1 - t^2 f(t)) \qquad (\text{por } 2.) \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} \;+\; (-1)^{n+1}t^{2n+2} - (-1)^{n+1}t^{2n+4}f(t)) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k t^{2k} \;+\; (-1)^{n+2}t^{2n+4}f(t) \end{aligned}$$

  lo que es precisamente la tesis de inducción.

4. Primitiva de f: Sea $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la primitiva de f definida por $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Determinar la función F.

Solución: Tenemos que $\displaystyle F(x) \;=\; \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \;=\; \big[\arctan(t)\big]_{t=0}^{t=x} \;=\; \arctan(x)\,.$

5. Desarrollo de F: A partir de la igualdad del ítem 3, demostrar que:

$$F(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} \;+\; (-1)^{n+1}\int_0^x t^{2n+2}f(t)\,dt \qquad\qquad (\text{para todos } n \in \mathbb{N} \text{ y } x \geq 0)$$

Solución: Por 3., tenemos que

$$\begin{aligned} F(x) \;=\; \int_0^x f(t)\,dt \;&=\; \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \;+\; (-1)^{n+1} t^{2n+2} f(t) \right) dt \\ &=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^x t^{2k}\,dt \;+\; (-1)^{n+1} \int_0^x t^{2n+2} f(t)\,dt \\ &=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \;+\; (-1)^{n+1} \int_0^x t^{2n+2} f(t)\,dt \end{aligned}$$

6. Acotación del resto: Sea $R_n(x) = (-1)^{n+1} \displaystyle\int_0^x t^{2n+2} f(t)\,dt$. Demostrar que

$$|R_n(x)| \;\le\; \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \qquad \text{(para todos } n \in \mathbb{N} \text{ y } x \ge 0)$$

Solución: Como $0 < f(t) \le 1$ (por 1.), tenemos que $0 \le t^{2n+2} f(t) \le t^{2n+2}$, de tal modo que:

$$|R_n(x)| \;=\; \int_0^x t^{2n+2} f(t)\,dt \;\le\; \int_0^x t^{2n+2}\,dt \;=\; \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\,.$$

7. Convergencia: Deducir del ítem 6. el siguiente resultado de convergencia:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \;=\; F(x) \qquad \text{(para todo } x \in [0,1])$$

Solución: Sea $x \in [0,1]$ fijado. Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\left| F(x) \;-\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \right| \;\underset{5.}{=}\; \left| (-1)^{n+1} \int_0^x t^{2n+2} f(t)\,dt \right| \;=\; |R_n(x)| \;\underset{6.}{\le}\; \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \;\le\; \frac{1}{2n+3}$$

(pues $0 \le x \le 1$), lo que implica que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \;\to\; F(x)$ cuando $n \to \infty$.

8. Fórmulas de Leibniz: Deducir de lo anterior las siguientes fórmulas, que permiten calcular aproximaciones del número π:

$$\text{(A)} \qquad \frac{\pi}{4} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \;=\; 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{\pi}{6} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \frac{1}{9 \cdot 3^4} - \cdots \right)$$

(Sugerencia: se recuerda que $\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$ y $\tan(\pi/4) = 1$.)

Solución (A) Aplicando 7. a $x = 1$, se deduce que:

$$\frac{\pi}{4} \;=\; \arctan(1) \;=\; F(1) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot 1^{2n+1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

(B) Aplicando 7. a $x = 1/\sqrt{3}$, se deduce que:

$$\frac{\pi}{6} \;=\; \arctan\bigl(1/\sqrt{3}\bigr) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$$