Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

PRIMER PARCIAL - 2 DE MAYO DE 2016 DURACIÓN: 4 HORAS

N° de lista	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple Opción

20 puntos.

En cada pregunta hay una sola opción correcta.
Respuesta correcta: 4 puntos Respuesta incorrecta: -1 punto No responde: 0 puntos

Respuestas

1	2	3	4	5

1) Sea $A = \left\{ \frac{m}{n} : 0 < m < n,\ m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

A) A está acotado superiormente, tiene supremo, pero no tiene máximo.

B) A no está acotado superiormente, por lo tanto no tiene supremo.

C) A tiene supremo, que es máximo.

D) A no está acotado superiormente, no tiene máximo, pero tiene supremo.

E) A está acotado superiormente, pero no tiene supremo.

2) Sea la sucesión a_n definida como:
$a_0 = 1$
$a_n = \frac{3}{n} a_{n-1}, \quad \forall n \geq 1.$

A) a_n converge, y por lo tanto está acotada superiormente e inferiormente.

B) a_n está acotada superiormente e inferiormente, pero no converge.

C) a_n converge, pero no está acotada superiormente.

D) a_n es creciente y acotada superiormente, por lo tanto converge.

E) a_n es creciente y no está acotada superiormente, por lo tanto diverge a $+\infty$.

3) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4$. Sea I el intervalo cerrado de longitud máxima, que contiene al 0, en el cual f es invertible, y sea g la función inversa de f en I.

A) $I = [-3, 2]$ y $g'(4) = \frac{1}{12}$.

B) $I = [-1, 4]$ y $g'(4) = \frac{1}{12}$.

C) f no es inyectiva en ningún intervalo que contenga al 0.

D) $I = [-1, 4]$ y $g'(4) = -\frac{1}{6}$.

E) $I = [-3, 2]$ y $g'(4) = -\frac{1}{6}$.

4) El polinomio $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$ tiene una raiz con parte real nula. Considere sus raíces en $\mathbb{C}$.

A) Una de ellas tiene módulo menor que 1 y las otras módulo mayor que 1.

B) Todas tienen módulo mayor que 1.

C) Todas tienen módulo menor que 1.

D) Dos de ellas tienen módulo menor que 1 y las otras módulo mayor que 1.

E) Existe al menos una con módulo igual a 1.

5) Sin intervención humana, una población de bacterias se duplicaría cada hora. Para controlar dicha población, cada hora se elimina una proporción $p \in (0,1)$ de la población existente. Sea a_n la cantidad de bacterias en la hora n.

A) Si $p = \frac{1}{4}$, $\{a_n\}$ permanece constante.

B) Si $p > \frac{1}{2}$, $\{a_n\}$ es monótona estrictamente decreciente.

C) Si $p < \frac{1}{2}$, $\{a_n\}$ está acotada.

D) Si $p = \frac{3}{4}$, $\{a_n\}$ es monótona creciente.

E) $\forall p \in (0,1)$, $\{a_n\}$ es monótona decreciente.

Desarrollo

20 puntos.

Considere que ningún resultado será tomado como válido si no está debidamente justificado.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - 2 & \text{si } x < 0 \\ x^3 + x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ |\sin(x)| & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) I) Enuncie y demuestre el Teorema de Bolzano.

II) Demuestre que f tiene una raíz en el intervalo $[0,1]$, demuestre que es única y determínela con un error menor o igual a $\frac{1}{8}$.

b) I) Defina $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

II) Determine si f es continua y derivable en a, para $a = 0,\ 1,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$. En los casos en que f sea derivable en a, halle $f'(a)$.

III) Realice una representación gráfica de f que incluya el estudio de raíces, crecimiento, extremos relativos y límites en $-\infty$ y $+\infty$.