Cálculo I

2do semestre de 2016

Solución del primer parcial

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 8 puntos)

Ejercicio 1 La imagen de un intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ por una función continua $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ siempre es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

Solución: Falso Contraejemplo: la imagen del intervalo abierto $(-\pi, \pi)$ por la función continua $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ es el intervalo cerrado $[-1, 1]$.

Ejercicio 2 Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función derivable en (a, b) tal que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es continua y monótona creciente en (a, b).

Solución: Verdadero (Resultado del curso)

Ejercicio 3 Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, entonces f es uniformemente continua.

Solución: Falso Contraejemplo: la función $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ es continua y acotada (por 1 en valor absoluto), pero no es uniformemente continua, pues su derivada $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos(1/x)$ no es acotada en $(0, 1)$.

Ejercicio 4 La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$ es convergente, y $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Solución: Verdadero Como $\left|1/\sqrt{3}\right| < 1$, la serie es convergente, y tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 16 puntos)

Ejercicio 1 ¿Cuál de los siguientes números complejos es una raíz cuarta de $-1-i$?

Solución: Tenemos que $|-1-i| = \sqrt{2}$ y $\arg(-1-i) = -3\pi/4$, lo que nos da la forma polar: $-1-i = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. Entonces, las cuatro raíces cuartas de $-1-i$ son dadas por:

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[4]{\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{3\pi}{16}} &&= \sqrt[8]{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{16}} \\
z_1 &= \sqrt[4]{\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{3\pi}{16}+i\frac{2\pi}{4}} &&= \sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{16}} \\
z_2 &= \sqrt[4]{\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{3\pi}{16}+i\frac{4\pi}{4}} &&= \sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{13\pi}{16}} \\
z_2 &= \sqrt[4]{\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{3\pi}{16}+i\frac{6\pi}{4}} &&= \sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{21\pi}{16}} \quad = \sqrt[8]{2}\,e^{-i\frac{11\pi}{16}}
\end{aligned}$$

La única raíz que aparece en las opciones es $\boxed{\sqrt[8]{2}\,e^{i\frac{13\pi}{16}}}$

Ejercicio 2 La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} e^{\operatorname{sen}(\pi x)} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ si y sólo si: ...

Solución: La función $f(x)$ es construida pegando las dos funciones

$$f_1(x) = e^{\operatorname{sen}(\pi x)} \qquad \text{y} \qquad f_2(x) = ax^2 + b$$

en el punto $x = 2$. Como las funciones f_1 y f_2 son continuas y derivables en $\mathbb{R}$, la función f es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$, independientemente de los valores de a y b. Para que f sea continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, se necesita estudiar su continuidad y su derivabilidad en $x = 2$.

- *Continuidad de f en $x = 2$.* Se observa que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} f_1(x) = f_1(2) = e^{\operatorname{sen}(2\pi)} = e^0 = 1 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} f_2(x) = f_2(2) = a \cdot 2^2 + b = 4a + b \end{aligned}$$

  Así, f es continua en el punto $x = 2$ si y sólo si $4a + b = 1$.

- *Derivabilidad de f en $x = 2$.* Las derivadas de las funciones f_1 y f_2 son dadas por:

$$f_1'(x) = \pi \cos(\pi x)\, e^{\operatorname{sen}(\pi x)} \qquad \text{y} \qquad f_2'(x) = 2ax$$

  Suponiendo que $f_1(2) = f_2(2)$ (es decir: $4a + b = 1$), se observa que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x\to 2^-} \frac{f_1(x) - f_1(2)}{x - 2} = f_1'(2) = \pi \cos(2\pi)\, e^{\operatorname{sen}(2\pi)} = \pi \\ \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{f_2(x) - f_2(2)}{x - 2} = f_2'(2) = 2a \cdot 2 = 4a \end{aligned}$$

  Así, f es derivable en el punto $x = 2$ si y sólo si $4a = \pi$.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 4a + b = 1 \\ 4a = \pi \end{cases}$ se deduce que: $\boxed{a = \frac{\pi}{4} \text{ y } b = 1 - \pi}$

Ejercicio 3 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es *falsa*? ...

Solución: La afirmación $\boxed{\operatorname{sen}(x)/x \text{ no tiene límite cuando } x \text{ tiende a } 0}$ es falsa, pues:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)/x = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(0)}{x - 0} = \operatorname{sen}'(0) = \cos(0) = 1$$

Las otras cuatro afirmaciones son verdaderas.

Ejercicio 4 Sea $A = A_1 \cup A_2$, donde $A_1 = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ y $A_2 = \left\{\frac{3}{2}\cos^2(x) : x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\right\}$. Entonces: ...

Solución:

- El conjunto $A_1 = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\} = \left\{\cdots, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ es el conjunto de los inversos de los enteros naturales no nulos. Este conjunto tiene máximo $\operatorname{máx}(A_1) = 1$, entonces $\sup(A_1) = \operatorname{máx}(A_1) = 1$. En otro lado, no tiene mínimo, pero tiene ínfimo $\operatorname{ínf}(A_1) = 0$.

- El conjunto $A_2 = \left\{\frac{3}{2}\cos^2(x) : x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\right\}$ es la imagen del intervalo $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ por la función $f(x) = \frac{3}{2}\cos^2(x)$. Se observa que:
  - En el intervalo $(-\frac{\pi}{4}, 0]$, la función f es estrictamente creciente, y recorre todos los valores entre $f(-\pi/4) = 3/4$ (excluido) y $f(0) = 3/2$ (incluido).
    Es decir: $f((-\frac{\pi}{4}, 0]) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$.
  - En el intervalo $[0, \frac{\pi}{4})$, la función f es estrictamente decreciente, y recorre todos los valores entre $f(0) = 3/2$ (incluido) y $f(\pi/4) = 3/4$ (excluido).
    Es decir: $f([0, \frac{\pi}{4}, 0)) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$.

  De tal modo que $A_2 = f((-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{2}] \cup (\frac{3}{4}, \frac{3}{2}] = (\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$. Así: $\text{ínf}(A_2) = \frac{3}{4}$ y $\sup(A_2) = \text{máx}(A_2) = \frac{3}{2}$, pero A_2 no tiene ínfimo.

Ordenando las cuatro cotas $0 = \text{ínf}(A_1)$, $\frac{3}{4} = \text{ínf}(A_2)$, $1 = \text{máx}(A_1) = \sup(A_1)$ y $\frac{3}{2} = \text{máx}(A_2) = \sup(A_2)$, se deduce que:

$$\boxed{\text{ínf}(A) = 0 \text{ y } \sup(A) = \text{máx}(A) = \tfrac{3}{2}, \text{ pero } A \text{ no tiene mínimo}}$$

Ejercicio de desarrollo (Total: 16 puntos)

1. Definir la noción de límite de sucesión: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ si y sólo si ...

2. Definir la noción de supremo en $\mathbb{R}$: $s = \sup(A)$ si y sólo si ...

3. Enunciar el axioma de completitud de $\mathbb{R}$.

4. Demostrar que toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente tiene límite.

Solución: véase las notas del curso.

Ahora, se considera la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recurrencia: $\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= 2 - \dfrac{1}{1+a_n} \end{cases}$

5. Demostrar por inducción completa que $1 \le a_n \le 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Caso de base: Se observa que $1 \le a_0\ (= 1) \le 2$.

Paso de inducción: Supongamos que $1 \le a_n \le 2$.

Entonces: $$2 \le 1 + a_n \le 3$$

Entonces: $$\frac{1}{3} \le \frac{1}{1+a_n} \le \frac{1}{2} \qquad \text{(pasando al inverso)}$$

Entonces: $$-\frac{1}{2} \le -\frac{1}{1+a_n} \le -\frac{1}{3} \qquad \text{(pasando al opuesto)}$$

Entonces: $$2 - \frac{1}{2}\ (= 3/2) \le 2 - \frac{1}{1+a_n} \le 2 - \frac{1}{3}\ (= 5/3)$$

Entonces: $$1 \le 2 - \frac{1}{1+a_n} \le 2 \qquad \text{(pues } 1 \le 3/2 \text{ y } 5/3 \le 2\text{)}$$

Es decir: $$1 \le a_{n+1} \le 2 \qquad \text{(def. de } a_{n+1}\text{)}$$

6. Demostrar que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente.

Solución: Demostremos por inducción completa que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso de base: tenemos que $a_0 = 1$ y $a_1 = 2 - \frac{1}{1+1} = 3/2$; luego: $a_0 \leq a_1$.

Paso de inducción: Supongamos que $a_n \leq a_{n+1}$.

Entonces: $1 + a_n \leq 1 + a_{n+1}$

Entonces: $\dfrac{1}{1+a_n} \geq \dfrac{1}{1+a_{n+1}}$ (pasando al inverso, y recordando que $a_n > 0$)

Entonces: $-\dfrac{1}{1+a_n} \leq -\dfrac{1}{1+a_{n+1}}$ (pasando al opuesto)

Entonces: $2 - \dfrac{1}{1+a_n} \leq 2 - \dfrac{1}{1+a_{n+1}}$

Es decir: $a_{n+1} \leq a_{n+2}$ (def. de a_{n+1} y de a_{n+2})

Por inducción completa, tenemos que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que demuestra que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente.

7. Deducir que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite L, y hallar el valor de L.

Solución: Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y acotada superiormente (por 2), tiene límite L (usando el resultado del ítem **4.**), y además, tenemos que $L \in [1, 2]$ (usando las desigualdades del ítem **5.**) Para calcular el límite L, se observa que

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{1+a_n}\right) = 2 - \frac{1}{1+L}$$

utilizando la continuidad de la función $f(x) = 2 - 1/(1+x)$ en el punto $x = L$ para establecer la igualdad de derecha. Así se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} L = 2 - \frac{1}{1+L} &\Leftrightarrow L^2 - L - 1 = 0 \quad \text{(por un cálculo sencillo)} \\ &\Leftrightarrow L = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{o} \quad L = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Pero como $L \geq 1$, se deduce que $\boxed{L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \text{ (número de oro)}}$