Cálculo I

Diciembre de 2016

Examen

20 de diciembre de 2016

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del parcial es de cuatro horas y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Sugerencia: sea cuidadoso al pasar las respuestas: lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

En esta prueba, se pueden utilizar las derivadas de las funciones usuales ($\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, x^α, e^x, $\log(x)$, $\operatorname{arcsen}(x)$, $\arccos(x)$, etc.) sin justificarlas.

VERDADERO/FALSO (Total: 10 puntos)

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Llenar cada casilla con las respuestas **V** (verdadero) o **F** (falso), según corresponda.
Correctas: 2 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 40 puntos)

1	**2**	**3**	**4**	**5**

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.
Correctas: 8 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 50 puntos)

Dos ejercicios de desarrollo (25 y 25 puntos) se encuentran en las hojas 3 y 4.

PARA USO DOCENTE

DES1				**DES2**				
1.	2.	3.	4.	1.	2.	3.	4.	5.

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 10 puntos)

1. Sean f y g funciones reales continuas en $[a,b]$, derivables en (a,b), y tales que $f(a) \neq f(b)$ y $g(a) \neq g(b)$. Entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que $\dfrac{f'(c)}{f(b)-f(a)} = \dfrac{g'(c)}{g(b)-g(a)}$.

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente tal que $a_n \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a algún límite finito.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f'(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces la función f presenta un máximo relativo o un mínimo relativo en $x = x_0$.

4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, entonces f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función seccionalmente continua en $[a,b]$ y $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Entonces, existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \mu$.

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 40 puntos)

1. Sea A el conjunto de números complejos definido por $A = \{z \in \mathbb{C} : z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0\}$.

(A) El conjunto A es una circunferencia, por tanto $\#A = \infty$.
(B) El conjunto A es una circunferencia degenerada (de radio 0) y por tanto $\#A = 1$; más aún $A = \{(1,0)\}$
(C) El conjunto A es vacío.
(D) A es el conjunto de las raíces de un polinomio con raíz doble, por tanto $\#A = 1$.
(E) $\#A = 3$ y $(1,0) \in A$.

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a algún límite $L \in \mathbb{R}$. Se define el recorrido de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. El conjunto A cumple que:

(A) El conjunto A está acotado y: o $\text{ínf}(A) = L$, o $\sup(A) = L$.
(B) El conjunto A está acotado inferiormente y $L = \text{ínf}(A)$,
o A está acotado superiormente y $L = \sup(A)$.
(C) El conjunto A puede no estar acotado.
(D) El conjunto A está acotado y se cumple que $L \leq \sup(A)$ y $L \geq \text{ínf}(A)$.
(E) El conjunto A está acotado, y $L = \sup(A)$ si y sólo si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.

3. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_0^x (e^t - 1)\, dt$.

(A) Las integrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{F(x)}\, dx$ y $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\, dx$ divergen.

(B) Las integrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{F(x)}\, dx$ y $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\, dx$ convergen.

(C) La integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{F(x)}\, dx$ diverge y la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\, dx$ converge.

(D) La integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{F(x)}\, dx$ converge y la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\, dx$ diverge.

(E) Ninguna de las opciones anteriores se aplica.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} |\operatorname{sen}(x)| + 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ e^{x-1} + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Los valores a, b y c que hacen que f sea continua y derivable en 0, y continua en 1 son:

(A) $(a, b, c) = (1, 2, 2)$

(B) $(a, b, c) = (-1, 1, -1)$

(C) $(a, b, c) = (-1, 2, 0)$

(D) $(a, b, c) = (2, 2, 3)$

(E) $(a, b, c) = (1, 1, 1)$

5. La integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos(x)\, dx$ vale:

(A) $\frac{e^{\pi}+2}{5}$

(B) $\frac{e^{\pi}}{5}$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

(D) 0

(E) $\frac{e^{\pi}-2}{5}$

Primer ejercicio de desarrollo (Total: 25 puntos)

En este ejercicio, sólo se consideran series reales.

1. Definir las nociones de serie convergente y de serie absolutamente convergente.

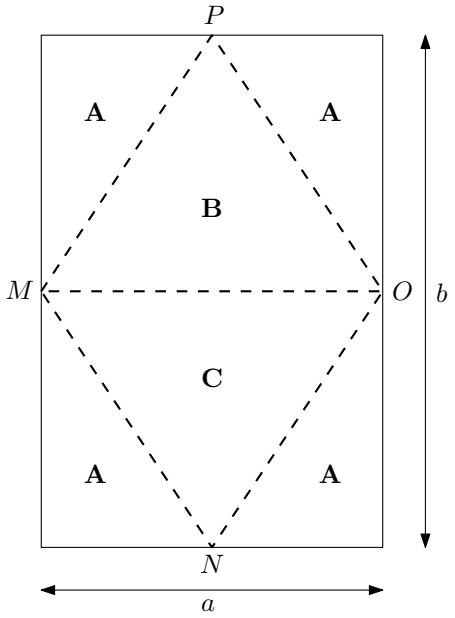
2. Demostrar que toda serie absolutamente convergente es convergente.

3. Dar un ejemplo de serie convergente que no sea absolutamente convergente. Explicitar los criterios de convergencia/divergencia usados para justificar dicho ejemplo.

4. Ahora, se supone que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ son dos series absolutamente convergentes, y se define $c_n = a_n b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Es la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolutamente convergente? En caso afirmativo, demostrarlo; en caso negativo, dar un contraejemplo (justificándolo).

Segundo ejercicio de desarrollo (Total: 25 puntos)

Se desea excavar un estanque rectangular en el cual se criarán 3 variedades de peces **A**, **B** y **C**, con fines alimentarios. El estanque será dividido en 6 regiones como indica la figura: las cuatro regiones triangulares externas para la especie **A**, la región triangular interna superior para la especie **B**, y la región triangular interna inferior para la especie **C**:



(En la figura, se supone que M, N, O y P son puntos medios de los respectivos lados.)

La separación entre las 6 regiones se efectúa mediante tabiques indicados por líneas discontinuas en la figura.

1. Expresar la suma L de las longitudes de los tabiques en función de a y b.

2. Ahora, se supone que L mide 100 metros. Expresar b^2 en función de a.
   ¿Cuál es el máximo valor posible para a?

El rendimiento de cada especie es proporcional a la superficie del estanque, ya que tiene profundidad constante. Se sabe que el rendimiento por metro cuadrado de la especie **B** es 3/4 del rendimiento de la especie **A** y que el de la especie **C** es 2/3 del de la especie **B**.

3. Expresar el rendimiento $r = r(a)$ del estanque en función de a y de s, donde s es el rendimiento de la especie **A** por metro cuadrado.

4. Demostrar que si r es una función positiva de la variable a, entonces r presenta un máximo en un punto a_0 si y sólo si la función r^2 presenta un máximo en el punto a_0.

5. Calcular el valor de a que maximiza la función r^2. Deducir los valores de a y de b que maximizan el rendimiento del estanque.