Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

EXAMEN - 22 DE FEBRERO DE 2014

N° de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple opción (Total: 50 puntos)

En cada pregunta hay una sola opción correcta.

Correcta: 10 puntos Incorrecta: -2,5 punto No responde: 0 punto

Puede ser de utilidad la siguiente información:

ángulo	seno	coseno
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$

Ejercicio 1.
Consideremos la función $f(x) = x^3 - 3x^2$. Entonces:

(A) f es invertible en el intervalo $(0, 2)$, la imagen de este intervalo es el intervalo $(-2, 0)$, y $(f^{-1})'(-2) = -\frac{1}{3}$.

(B) f es invertible en el intervalo $(0, 3)$, la imagen de este intervalo es el intervalo $(-4, 0)$, y $(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{24}$.

(C) f es invertible en el intervalo $(0, 2)$, la imagen de este intervalo es el intervalo $(-4, 0)$, y $(f^{-1})'(-2) = -\frac{1}{9}$.

(D) f es invertible en el intervalo $(0, 3)$, la imagen de este intervalo es el intervalo $(-2, 0)$, y $(f^{-1})'(-2) = 3$.

(E) f es invertible en el intervalo $(0, 2)$, la imagen de este intervalo es el intervalo $(-4, 0)$, y $(f^{-1})'(-2) = -\frac{1}{3}$.

Ejercicio 2.

El valor de la integral $I = \int\limits_{1}^{e^{\frac{\pi}{4}}} \operatorname{sen}(\ln(x))\, dx$ es:

(A) 2

(B) 0

(C) $\sqrt{2}$

(D) $\frac{1}{2}$

(E) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ejercicio 3.

Hallar el número k real para que la integral $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{k}{3x-1} \right) dx$ converja y hallar I.

(A) $k = 3$ e $I = \operatorname{arc\,tg}(\frac{\sqrt{2}}{3}) - \ln(\frac{2}{3})$.

(B) $k = -1$ e $I = \frac{1}{2}\ln(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(C) $k = 3$ e $I = \ln(\frac{\sqrt{2}}{3})$.

(D) $k = -3$ e $I = \ln(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

(E) $k = 3$ e $I = \frac{1}{3}\ln(\sqrt{2})$.

Ejercicio 4.

Resolver

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{2x^2 \operatorname{sen}(x)}.$$

(A) 0

(B) $-\frac{1}{6}$

(C) $+\infty$

(D) $-\frac{1}{3}$

(E) 1

Ejercicio 5.
El producto de todas las soluciones de la ecuación compleja:

$$z^4 = \sqrt{3} - i$$

es:

(A) $-\sqrt{3} + i$

(B) $-1 + 2i$

(C) -1

(D) $2 - i$

(E) $1 + 3i$

Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

EXAMEN - 22 DE FEBRERO DE 2014

N° de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Desarrollo (Total: 50 puntos) Justificar las respuestas.

1. **(Puntos: 27)**

   a) Enuncie y demuestre el Teorema del Valor Medio para integrales, justificando los razonamientos empleados.

   b) Un automóvil se desplaza por una ruta con velocidad $v(t)$, donde $t \geq 0$ denota al tiempo transcurrido medido en horas. Llamemos $d(t)$ a la distancia recorrida por el automóvil entre el instante 0 y el instante t (recordemos que $v(t) = d'(t)$).

   Demuestre que para todo $t > s \geq 0$ existe un valor w de la velocidad tal que $d(t) - d(s) = (t - s)w$, justificando los razonamientos empleados.

   c) La velocidad máxima para la ruta en cuestión es $90km/h$. Se sabe que $d(1) = 80km$ y $d(2) = 172km$. Dadas las afirmaciones:

   (A) El auto no ha respetado el límite de velocidad en $[0, 1]$;

   (B) El auto no ha respetado el límite de velocidad en $[0, 2]$;

   elija la opción correcta, justificando:

   (I) (A) y (B) son verdaderas.

   (II) (A) es verdadera, pero con esos datos no se puede decidir sobre (B).

   (III) (B) es verdadera, pero con esos datos no se puede decidir sobre (A).

   (IV) (A) y (B) son falsas.

2. *a*) **(Puntos: 23)**

Sea $q \in \mathbb{R}$ y $q \neq 1$. Probar que para todo $n \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(directamente o por inducción).

b) Clasificar la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ en función de q y calcular su suma cuando es convergente.

c) Se considera la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, con $a_n \geq 0$. Probar el criterio de la raíz demostrando las siguientes afirmaciones:

(*i*) Si $\sqrt[n]{a_n} \leq k < 1$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge y si $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ para todo $n \geq n_0$, entonces $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

(*ii*) Deducir que si existe $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$ y $R < 1$, entonces la serie converge y si $R > 1$, entonces la serie diverge. ¿Qué ocurre si $R = 1$?

d) Clasificar la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+x)5^n}$$

en función de $x > 0$. Justificar.