Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

EXAMEN - 3 DE AGOSTO DE 2013 DURACIÓN: 3 HORAS Y MEDIA

N° de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple opción (Total: 50 puntos)

En cada pregunta hay una sola opción correcta.

Respuesta correcta: 10 puntos **Respuesta incorrecta: -2,5 punto** **No responde: 0 punto**

Ejercicio 1.
Se considera el límite $L = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{\operatorname{sen}(e^{x-2}+1-x)}{(x-2)^\alpha}$ para un α real. Indicar cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta:

(A) El límite es $1/2$ para $\alpha = 2$ y es infinito para $\alpha > 2$.

(B) El límite es finito para todo α.

(C) El límite es 0 para $\alpha = 2$ y es infinito para $\alpha > 2$.

(D) El límite es finito para $\alpha = 2$ y es infinito para $\alpha < 2$.

(E) El límite es 0 para $\alpha = 1$, es $1/2$ para $\alpha = 2$ y es infinito para los demás valores de α

Ejercicio 2.
Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = -iz + i + 1$. Luego:

(A) f es una rotación en el plano complejo de centro 1 y ángulo $-\dfrac{\pi}{2}$.

(B) f es una traslación en el plano complejo de vector de traslación $1 + i$.

(C) f es una rotación en el plano complejo de centro $i + 1$ y ángulo $-\dfrac{\pi}{2}$.

(D) f es una rotación en el plano complejo de centro $i + 1$ y ángulo $\dfrac{\pi}{2}$.

(E) f es una rotación en el plano complejo de centro 1 y ángulo $\dfrac{\pi}{2}$.

Ejercicio 3.
Se considera la función $f : (0, 3/2) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log|2x^2 - 3x|$. Sea $I \subset (0, 3/2)$ el mayor intervalo abierto posible tal que f es invertible en I y f^{-1} es decreciente. Entonces:

(A) $I = (3/4, 3/2)$ y $(f^{-1})'(0) = 0$.

(B) $I = (0, 3/4)$ y $(f^{-1})'(0) = -1$.

(C) $I = (0, 3/2)$ y $(f^{-1})'(0) = -1$.

(D) $I = (3/4, 3/2)$ y $(f^{-1})'(0) = -1$.

(E) $I = (0, 3/4)$ y $(f^{-1})'(0) = 1$.

Ejercicio 4.
Sea la sucesión: $s_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k}$.
Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) s_k converge.

(II) s_k tiene una subsucesión que diverge a $+\infty$.

(III) s_k tiene una subsucesión creciente.

Entonces:

(A) Solo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.

(B) Solo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.

(C) Ninguna de las afirmaciones es correcta.

(D) Solo la afirmación (I) es correcta.

(E) Todas las afirmaciones son correctas.

Ejercicio 5.
Indicar el valor de la integral

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

Sugerencia: hacer el cambio de variable $u = \sqrt{x^2+1}$.

(A) $\log \frac{2}{3}$ (B) $\log \sqrt{\frac{2}{3}}$ (C) $\log \frac{3}{2}$ (D) $\log \sqrt{\frac{3}{2}}$ (E) $\log \sqrt{\frac{1}{2}}$

Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

EXAMEN - 3 DE AGOSTO DE 2013 DURACIÓN: 3 HORAS Y MEDIA

N° de examen	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Desarrollo (Total: 50 puntos) Justificar las respuestas.

Ejercicio 1.
(25 puntos)

1. Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable y tiene un extremo relativo en a entonces $f'(a) = 0$.
2. Usar la parte anterior y el Teorema de Weierstrass para demostrar el siguiente Teorema de Rolle: sea f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
3. Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua tal que $\int_0^2 f(t)dt = \int_0^3 f(t)dt$. Probar usando el Teorema de Rolle que existe $c \in [2, 3]$ tal que $f(c) = 0$.
   Sugerencia: considerar $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

Ejercicio 2.
(25 puntos)

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función positiva y continua.
   a) Enunciar la fórmula del volumen $V(a, b)$ del sólido de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función f alrededor del eje Ox, con $x \in [a, b]$.
   b) Enunciar la fórmula del área $A(a, b)$ determinada entre la recta $x = a$, la recta $x = b$, el eje Ox y la gráfica de la función f.
2. Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función positiva y continua. Se define el volumen $V(1, +\infty)$ del sólido de revolución que se obtiene al girar la gráfica de la función f alrededor del eje Ox, con $x \in [1, +\infty)$ mediante $\lim_{b\to+\infty} V(1, b)$. Se define análogamente el área $A(1, +\infty)$ entre la recta $x = 1$, el eje Ox y la gráfica de la función f.
   a) Mostrar un ejemplo donde el volumen $V(1, +\infty)$ es finito, pero el área $A(1, +\infty)$ no es finita.
   b) Probar que si $f(x) < 1$ para toda $x \in [1, +\infty)$ y el área determinada entre la recta $x = 1$, el eje Ox y la gráfica de la función f es finita, entonces el volumen de revolución obtenido al girar f respecto al eje Ox debe ser finito.