Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

Examen - 24 de julio de 2015 Duración: 3 horas y media

N° de lista	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple opción (Total: 50 puntos)

Respuesta correcta: 10 puntos Respuesta incorrecta: -2 puntos No responde: 0 punto

Respuestas de múltiple opción:

1	2	3	4	5

Ejercicio 1.

Considere la sucesión $a_n = (-1)^n\pi - \frac{1}{n}$, y sea el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ su recorrido: $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces:

(A) El conjunto A está acotado, y por lo tanto tiene supremo.
(B) El conjunto A no está acotado.
(C) El conjunto A no tiene supremo, ya que a_n no converge.
(D) El conjunto A está acotado, pero no tiene supremo ya que $A \neq \emptyset$.
(E) El conjunto A está acotado, pero no tiene supremo ya que $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Ejercicio 2.

Se consideran las siguientes series:

(I) $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{n+1}{n} - \frac{n+1}{n+2})$
(II) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$
(III) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Indicar la afirmación correcta:

(A) La serie (III) no converge, (II) converge a 1/2 y (I) converge a 1.
(B) La serie (I) diverge, (III) converge y (II) converge a 1/2.
(C) Todas las series convergen, (III) converge absolutamente y (II) converge a 2.
(D) La serie (III) no converge, (I) converge a 1 y (II) converge a 2.
(E) Todas las series convergen, (I) y (II) convergen a 1.

Ejercicio 3.

Sea F la función definida como

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_1^{x^3} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt.$$

Entonces la derivada de la función inversa de F en 0 vale:

(A) $\sqrt{e}$
(B) $2\sqrt{e}$
(C) $\frac{1}{2\sqrt{e}}$
(D) $\frac{3\sqrt{e}}{2}$
(E) $\frac{2\sqrt{e}}{3}$

Ejercicio 4.
Se consideran las siguientes afirmaciones sobre funciones reales:
(I) Si $f(x)$ es derivable en x_0, entonces $|f(x)|$ es derivable en x_0.
(II) Si $|f(x)|$ es continua en x_0, entonces $f(x)$ es continua en x_0.
(III) Si $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ es continua, entonces la restricción de f al intervalo $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ tiene máximo y mínimo.
(IV) Si $f(x)$ es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$, entonces existe $c \in (0,1)$ tal que

$$f'(c) = f(1) - f(0).$$

Indicar la opción correcta:

(A) Todas las afirmaciones son verdaderas.
(B) Solamente (III) es verdadera.
(C) Solamente (II) es verdadera.
(D) (II) y (III) son verdaderas, (I) y (IV) son falsas.
(E) (I) y (II) son falsas, (III) y (IV) son verdaderas.

Ejercicio 5.
Se consideran dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ tales que: $(f(x))^2 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Se sabe además que $lim_{x\to\infty} \frac{(f(x))^2}{\frac{1}{x^3}} = \pi$ y que las funciones son continuas en $\mathbb{R}$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) Por criterio de equivalentes $\int_1^\infty (f(x))^2 dx$ diverge.
(II) $\int_0^1 g(x)dx$ puede ser divergente.
(III) Si g es monótona decreciente y $\sum_1^\infty g(n)$ converge, entonces $\int_1^\infty f(x)dx$ converge.
(IV) Si $f(x) \neq 0\ \forall\, x$ entonces $\int_1^\infty \frac{g(x)}{f(x)} dx$ converge.

Indicar la opción correcta:

(A) Sólo la afirmación I es correcta.
(B) Sólo la afirmación III es correcta.
(C) Sólo las afirmaciones I y II son correctas.
(D) Sólo las afirmaciones III y IV son correctas.
(E) Todas las afirmaciones son correctas.

Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

Examen - 24 de julio de 2015 Duración: 3 horas y media

N° de lista	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Desarrollo (Total: 50 puntos)

Problema 1 (15 puntos)

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión.

(1) Defina límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Demostrar que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es monótona creciente y acotada superiormente, entonces tiene límite $L \in \mathbb{R}$.

(3) Sea la sucesion a_n definida por recurencia como:

- $a_1 = \frac{1}{2}$
- $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n^2}$

Usar las partes anteriores para probar que a_n tiene límite y calcularlo. (Sugerencia: Probar primero que $0 < a_n < 1$ $\forall n \geq 1$ y luego probar que $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \geq 1$.)

Problema 2 (10 puntos)

(1) Demostrar que $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$

(2) Calcular, utilizando la fórmula anterior $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}cos(x)dx$

Problema 3 (10 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in \mathbb{R}$:

1) Defina continuidad de f en a.

2) Enuncie el Teorema de Bolzano.

3) Utilizando la parte anterior, probar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$:

$$x \cdot (\frac{x^2}{2} - 1) - 5 = Ln(x) - e^x.$$

4) Probar que la solución obtenida en la parte anterior es única.

Problema 4 (15 puntos)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(1) Demostrar que f es continua en todo $\mathbb{R}$.

(2) Demostrar que f derivable en todo $\mathbb{R}$ y hallar su derivada.

(3) Demostrar que $f'(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

(4) Demostrar que no existe $\lim_{x\to 0} \cos(\frac{1}{x})$. (Sugerencia: considerar las sucesiones $\frac{1}{2n\pi}$ y $\frac{1}{(2n+1)\pi}$).

(5) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$ y deducir que f' no es derivable en 0.