Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

EXAMEN - 18 DE DICIEMBRE DE 2015 DURACIÓN: 4 HORAS

N° de lista	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple opción (Total: 54 puntos)

En cada pregunta hay una sola opción correcta.

Respuesta correcta: 6 puntos Respuesta incorrecta: -1 punto No responde: 0 punto

Respuestas de múltiple opción

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ejercicio 1.

Se considera la función definida por $f(x) = \frac{1}{x^\alpha\sqrt{x^2+1}}$. Entonces, $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge si y solo si:

(A) $\alpha < 1$ (B) $\alpha \in [0,1]$ (C) $\alpha \in (0,1]$ (D) $\alpha \in (0,1)$ (E) $\alpha > 0$

Ejercicio 2.

Se considera la siguiente igualdad

$$\int_a^{x^2} f(t)dt = -1 + e^{-x^2},$$

donde f es una función continua en $\mathbb{R}$ y a un número real no negativo. Entonces:

(A) $f(1) = 0$ y $a = 1$.

(B) $f(1) = -e$ y $a = 1$.

(C) $f(1) = -e^{-1}$ y $a = 0$.

(D) $f(1) = 0$ y $a = 0$.

(E) $f(1) = -1$ y $a = 0$.

Ejercicio 3.

La profesora de plástica nos propuso hacer una papelera cilíndrica y pintarla (la parte lateral más la base). La cantidad de pintura que tengo alcanza para pintar un área de 1 metro cuadrado. Utilizando toda la pintura disponible, ¿cuál es el volumen máximo (en metros cúbicos) que puede tener mi papelera?

Recordar que si un cilindro tiene altura h y una base de radio r, el área lateral es $2\pi rh$, el área de la base es πr^2, y el volumen del cilindro es $\pi r^2 h$. Indicar la opción correcta:

(A) $\frac{1}{(\sqrt{3})^3}$ (B) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (C) $\frac{1}{3\sqrt{3\pi}}$ (D) $\frac{\pi}{2}$ (E) π

Ejercicio 4.
El valor de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{\pi}{6}\right)^n$ es:

(A) $\frac{6}{6+\pi}$ (B) $+\infty$ (C) $\frac{6}{6-\pi}$ (D) $-\infty$ (E) $\frac{6}{\pi-6}$

Ejercicio 5.
El polinomio de Taylor de grado 3 en el punto $a = 0$ de la función definida por $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ es:

(A) $1 - \frac{x^4}{2}$ (B) $x + \frac{x^3}{6}$ (C) $1 + x + \frac{x^3}{2}$ (D) $x - \frac{x^3}{3}$ (E) $1 - \frac{x^2}{2}$

Ejercicio 6.
El valor de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$ es:

(A) $+\infty$ (B) $-\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) 0

Ejercicio 7.
Una primitiva de la función $\frac{x}{(x^2+1)^{42}}$ es:

(A) $-\frac{(x^2+1)^{-41}}{82}$ (B) $\frac{1}{(x^2+1)^{43}}$ (C) $-\frac{(x^2+1)^{-43}}{86}$ (D) $\frac{1}{(x^2+1)^{41}}$ (E) $\frac{(x^2+1)^{-41}}{2x}$

Ejercicio 8.
La integral $\int_0^\pi (\cos(3x))^2\, dx$ vale:

(A) -1 (B) $\pi/2$ (C) 1 (D) 0 (E) $\pi^2/6$

Ejercicio 9.
Considere el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : \quad z \neq 0,\ \overline{z} = -z^3\}$.

(A) A tiene exactamente cuatro elementos distintos, dos de los cuales tienen parte real $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(B) A tiene exactamente cuatro elementos distintos, dos de los cuales tienen parte real $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(C) A tiene exactamente tres elementos distintos, uno de los cuales tiene parte real $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(D) A tiene exactamente tres elementos distintos, uno de los cuales tiene parte real $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(E) A tiene exactamente tres elementos distintos, dos de los cuales tienen parte real $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

Examen - 18 de diciembre de 2015 Duración: 4 horas

N° de lista	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Desarrollo (Total: 46 puntos) Justificar las respuestas.

PARA USO DOCENTE

1	2	TOTAL

Ejercicio 1.
(23 puntos) Demostrar el teorema del valor medio para integrales: si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua entonces existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

Ejercicio 2.
(23 puntos) Demostrar la siguiente versión del teorema fundamental del Cálculo: si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y se define $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ entonces F es derivable y $F'(x) = f(x)$ para todo x.