Solución problema desarrollo primer parcial 2008.

a) Definir supremo de un conjunto y enunciar el axioma de completitud y enunciar el axioma de completitud.

b) Probar que toda sucesión no decreciente acotada superiormente tiene límite.

c) Sea una sucesión definida por recurrencia donde $x_1 \in (-1, 0)$, y $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} - 1$.

   (i) Probar por inducción que $x_n \in (-1, 0)$.

   (ii) Probar que es monótona creciente.

   (iii) Concluir que es convergente.

   (iv) Hallar el límite de la sucesión.

RESPUESTA

a) El supremo de un conjunto de números reales es un número x cota superior del conjunto y menor o igual que cualquier otra cota superior. El axioma de completitud dice que todo conjunto no vacío de números reales, acotado superiormente posee supremo.

b) Sea (a_n) una sucesión acotada superiormente, existe entonces $K \in \mathbb{R}$ tal que $a_n < K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
El conjunto $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto no vacío de números reales acotado superiormente. Por el axioma de completitud dicho conjunto posee un supremo L. Demostraremos que éste es el límite de la sucesión.
Efectivamente, dado $\epsilon > 0$, como L es el supremo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \epsilon < a_{n_0} \leq L$, pero como la sucesión es creciente $a_{n_0} \leq a_n \leq L$ para todo $n > n_0$, por lo tanto $L - \epsilon < a_n \leq L$ para todo $n > n_0$ por lo tanto $|L - a_n| < \epsilon$ para todo $n > n_0$, como se quería demostrar.

c) (i) Para $n = 1$ es obviamente cierto.
Supongamos por hipótesis de inducción que que $x_n \in (-1, 0)$ y demostremos que $x_{n+1} \in (-1, 0)$.
Como $x_n \in (-1, 0)$ se deduce que $1 + x_n \in (0, 1)$ y por lo tanto $\sqrt{1 + x_n} \in (0, 1)$. Restando 1 se tiene que $\sqrt{1 + x_n} - 1 \in (-1, 0)$ y como $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} - 1$ se deduce lo que se quería.

(ii) $x_{n+1} - x_n = \sqrt{1 + x_n} - 1 - x_n = \sqrt{1 + x_n} - (1 + x_n)$. Como $1 + x_n \in (0, 1)$, y si $a \in (0, 1)$, $a < \sqrt{a}$, resulta que $x_{n+1} - x_n$ es positivo y la sucesión creciente.
También puede verse así: $\sqrt{1 + x_n} - 1 - x_n = \sqrt{1 + x_n}(1 - \sqrt{1 + x_n})$. Como $\sqrt{1 + x_n} < 1$, resulta.

(iii) Es una sucesión monótona creciente acotada superiormente por 0, por el teorema, converge.

(iv) El límite cumple $L = \sqrt{1 + L} - 1$, de donde $1 + L = \sqrt{1 + L}$. Elevando al cuadrado y trasponiendo, $(1 + L)L = 0$, de donde los posibles límites son 0 y -1. Por la monotonía, el límite es 0.