Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

EXAMEN - 21 DE JULIO DE 2016 DURACIÓN: 4 HORAS

N° de lista	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple Opción

40 puntos

En cada pregunta hay una sola opción correcta.
Respuesta correcta: 8 puntos Respuesta incorrecta: -2 puntos No responde: 0 puntos

Respuestas

1	2	3	4	5

1) Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que para todo n se cumple $0 < a_n \leq 1$, $b_n \geq 1$ y $b_n a_n \leq a_{n+1}$. Entonces necesariamente

   A) $\{a_n\}$ converge a L tal que $0 < L \leq 1$.

   B) $\{a_n b_n\}$ diverge a $+\infty$.

   C) $\{a_n b_n\}$ converge al valor 0.

   D) $\{a_n\}$ oscila.

   E) $\{a_n\}$ converge al valor 0.

2) Determinar el volumen máximo de un prisma de base cuadrada que se puede colocar dentro de una esfera de radio 1.

   A) $\frac{8}{\sqrt{27}}$

   B) $\frac{\sqrt[3]{24\pi}}{3}$

   C) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

   D) $\frac{\sqrt{2}}{9}$

   E) $\frac{\sqrt[3]{4\pi}}{3}$

   (Sugerencia: Observar que la diagonal del prisma es el diámetro de la esfera. Relacionarla con la altura y la diagonal de la base.)

3) Sean $T = \{z \in \mathbb{C} : z^8 = 1\}$ y $S = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = -Im(z)\}$. Entonces el cardinal (cantidad de elementos) de $S \cap T$ es:

A) 1

B) 0

C) 4

D) 2

E) 3

4) Para cada $a \in \mathbb{R}^+$, el área encerrada entre la parábola definida por $f(x) = -ax^2 + 1$ y la parábola definida por $g(x) = a^2x^2 - 1$ es:

A) $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}} (-ax^2 + 1)dx - \int_{-1/a}^{1/a} (a^2x^2 - 1)dx.$

B) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (-(a^2 + a)x^2 + 2)dx.$

C) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2/(a^2+a)}}^{\sqrt{2/(a^2+a)}} (-(a^2 + a)x^2 + 2)dx.$

D) $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}} (-ax^2 + 1)dx + \int_{-1/a}^{1/a} (a^2x^2 - 1)dx.$

E) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2/(a^2+a)}}^{\sqrt{2/(a^2+a)}} (a^2 - a)x^2dx.$

5) Para cada $\lambda > 0$ la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lambda}{x(x+\lambda)}dx$:

A) Diverge a $+\infty$ $\forall\lambda > 0$.

B) Diverge a $+\infty$ si y sólo si $\lambda > 1$.

C) Converge si y sólo si $\lambda > 1$.

D) Converge si y sólo si $\lambda > \frac{1}{2}$.

E) Converge $\forall\lambda > 0$.

Desarrollo

60 puntos

Considere que ningún resultado será tomado como válido si no está debidamente justificado.

1) *a*) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a, b]$. Definir partición de $[a, b]$, suma superior e inferior de f y función integrable en $[a, b]$.

   b) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a, b]$. Demostrar que f es integrable en $[a, b]$ sii $\forall \epsilon > 0$ existe una partición P del intervalo $[a, b]$ tal que $S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$.

   c) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en $[a, b]$ tal que $\forall x \in (a, b]$ f es integrable en $[x, b]$. Probar que f es integrable en $[a, b]$.

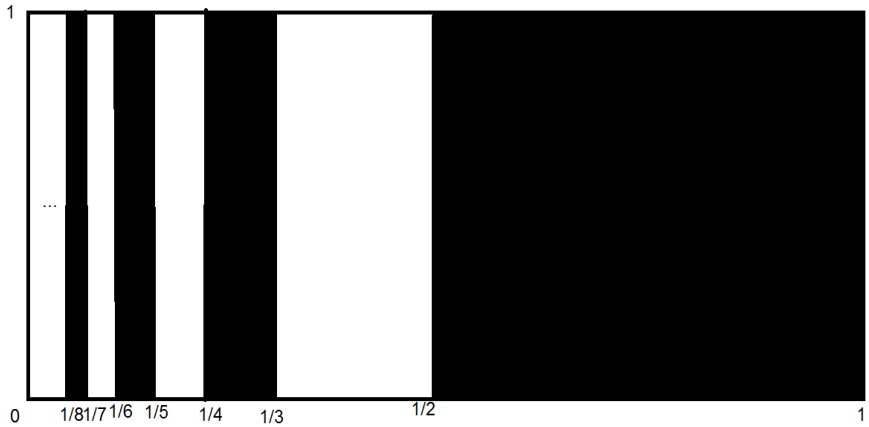
   d) Dar un ejemplo de una función acotada no integrable. Justifique.

2) *a*) Enunciar el Teorema de Taylor.

   b) Calcular el desarrollo de Taylor de orden n de $\log(1 + x)$ en $x = 0$.

   c) Enunciar el Teorema del Resto de Lagrange.

   d) Probar que $P_n\left(\log(1 + x), 0\right)(x)$ converge a $\log(1 + x)$ $\forall x > 0$.

   e) La siguiente figura representa el comienzo de un procedimiento que pinta rectángulos. Expresar el área pintada de negro como una serie.

   f) Calcular el área pintada de negro al finalizar el procedimiento.