Cálculo I

Febrero de 2017

Solución del examen

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 10 puntos)

Ejercicio 1 Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones con límites finitos $A, B \in \mathbb{R}$, respectivamente. Si $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $A < B$.

Solución: Falso Lo único que se puede deducir de las hipótesis es que $A \leq B$. Se puede ocurrir que $A = B$, por ejemplo con las sucesiones $a_n = -1/(n+1)$ y $b_n = 1/(n+1)$ que cumplen $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y que tienen mismo límite $A = B = 0$.

Ejercicio 2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable. Si existe $k > 0$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces la función f es uniformemente continua.

Solución: Verdadero Véase el curso.

Ejercicio 3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, y $a \in \mathbb{R}$ tal que $f'(a) \geq 0$. Entonces necesariamente existe un intervalo I con $a \in I$ tal que la función f es creciente en I.

Solución: Falso Contraejemplo: $f(x) = -x^3$ y $a = 0$. Tenemos que $f'(a) = 0 \geq 0$, pero la función f es estrictamente decreciente en todo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Otro contraejemplo (con $a = 0$ y $f'(a) = 1 > 0$) es dado por la función del ejercicio 2 múltiple opción más abajo.

Ejercicio 4 Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua, negativa y creciente. Entonces la integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge si y sólo si la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ converge.

Solución: Verdadero Como f es continua, negativa y creciente, tenemos que $-f$ es continua, positiva y creciente. Por el criterio integral, la integral $\displaystyle\int_0^\infty -f(x)\,dx$ converge si y sólo si la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} -f(n)$ converge. Pero esto implica (pasando al opuesto) que la integral $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge si y sólo si la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ converge.

Ejercicio 5 Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces la imagen de f es un intervalo cerrado.

Solución: Verdadero Véase el curso.

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 40 puntos)

Ejercicio 1 Sea $w \in \mathbb{C}$, que satisface la ecuación $w^4 = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4})$, y también $\mathrm{Re}(w) < 0$, $\mathrm{Im}(w) > 0$. Definimos $u = (i-1)w$. Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $\mathrm{Re}(u) > 0$ e $\mathrm{Im}(u) < 0$
(II) $w^5 = w$
(III) $\mathrm{Re}(u) < 0$ e $\mathrm{Im}(u) < 0$
(IV) $|u| = \sqrt{2}$

Solución: En forma polar, tenemos que $\cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}) = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Luego, el número w, que es una raíz cuarta del número anterior, pertenece al conjunto $\{e^{i\frac{\pi}{16}}, e^{i\frac{9\pi}{16}}, e^{-i\frac{15\pi}{16}}, e^{-i\frac{7\pi}{16}}\}$. Pero como $\mathrm{Re}(w) < 0$ y $\mathrm{Im}(w) > 0$, tenemos que $w = e^{i\frac{9\pi}{16}}$. Ahora, se observa que

$$u \;=\; (i-1)w \;=\; \big(\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\big)e^{i\frac{9\pi}{16}} \;=\sqrt{2}\,e^{i\frac{21\pi}{16}} \;=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{11\pi}{16}}$$

Así tenemos que $\mathrm{Re}(u) < 0$ e $\mathrm{Im}(u) < 0$ (III), y que $|u| = \sqrt{2}$ (IV). En otro lado, la afirmación (I) es falsa, así como la afirmación (II), pues $w^5 = e^{i\frac{45\pi}{16}} = e^{i\frac{13\pi}{16}} \neq w$. Luego:
$\boxed{\text{Sólo las afirmaciones III y IV son correctas.}}$

Ejercicio 2 Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ y $f(x) = x + x^2\,\mathrm{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$. Entonces...

Solución: Es claro que la función f es continua y derivable en cada uno de los dos intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$, y que en estos intervalos, su derivada es dada por:

$$f'(x) \;=\; 1 + 2x\,\mathrm{sen}\big(\tfrac{1}{x}\big) + x^2\Big(-\tfrac{1}{x^2}\cos\big(\tfrac{1}{x}\big)\Big) \;=\; 1 + 2x\,\mathrm{sen}\big(\tfrac{1}{x}\big) - \cos\big(\tfrac{1}{x}\big)$$

Entonces, queda estudiar las propiedades de f y de f' en el punto 0.

- Continuidad: tenemos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) \;=\; \lim_{x\to 0}(x + x^2\,\mathrm{sen}(1/x)) \;=\; 0 + 0 \;=\; f(0)$$

  Entonces la función f es continua en el punto 0.
- Derivabilidad: tenemos que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \;=\; \frac{f(x)}{x} \;=\; 1 + x\,\mathrm{sen}\big(\tfrac{1}{x}\big) \;\longrightarrow\; 1 \qquad \text{cuando } x \to 0$$

  Entonces la función f es derivable en el punto 0, con derivada $f'(0) = 1$.
- En otro lado, se observa que $1 + 2x\,\mathrm{sen}\big(\frac{1}{x}\big) \to 1$ cuando $x \to 0$, pero $\cos\big(\frac{1}{x}\big)$ no tiene límite cuando $x \to 0$. Entonces, la función $f'(x)$ no tiene límite cuando $x \to 0$, lo que implica que f' no es continua en $\mathbb{R}$, y que la función f no es de clase C^1.

Entonces, la única opción que se aplica es: $\boxed{f \text{ es derivable en } 0,\ f'(0) = 1, \text{ pero } f \text{ no es } C^1.}$

Ejercicio 3 La integral $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\,dt$ vale...

Solución: Haciendo el cambio de variable $t = 2u$, tenemos que

$$\int_0^2 \sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\,dt \;=\; 2\int_0^1 \sqrt{1-\frac{(2u)^2}{4}}\,(2\,du) \;=\; 2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du$$

En el curso, calculamos la integral $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du$, y vimos que representa el área de un cuarto de círculo de radio 1, es decir: $\dfrac{\pi}{4}$. Luego, la integral deseada vale $2\cdot\dfrac{\pi}{4} \;=\; \boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

Ejercicio 4 Sea $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x (t^2+t)e^{-t^2}dt$. Entonces la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{F(x)}}\,dx$...

Solución: Sea $F(x) = \int_0^x (t^2+t)e^{-t^2}dt$. Por el teorema fundamental, tenemos que $F'(x) = (x^2+x)e^{-x^2}$. Derivando una vez más, se obtiene que

$$F''(x) = (2x+1)e^{-x^2} + (x^2+x)(-2x)e^{-x^2} \;=\; (1+2x-2x^2-2x^3)e^{-x^2}$$

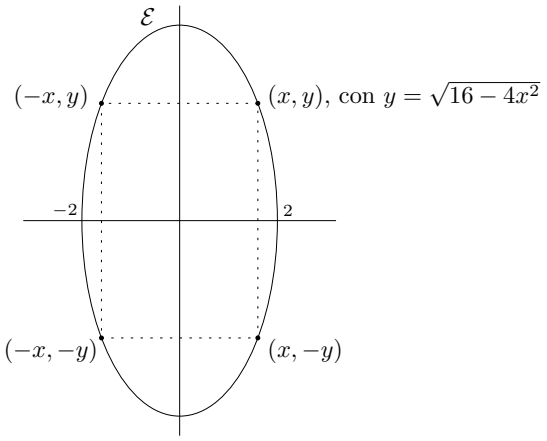
En particular, tenemos que $F(0) = 0$, $F'(0) = 0$ y $F''(0) = 1$. Escribiendo el desarrollo de Taylor de la función F al orden 2 en el punto 0, obtenemos que

$$F(x) \;=\; F(0) + F'(0)x + F''(0)\frac{x^2}{2} + o(x^2) \;=\; \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Así tenemos que $F(x) \sim \frac{x^2}{2}$ (cuando $x \to 0$), lo que implica que $\frac{1}{\sqrt{F(x)}} \sim \frac{\sqrt{2}}{x}$ (cuando $x \to 0$). Como la integral impropia $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ (primera especie) es divergente, se deduce por equivalencia que la integral impropia $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{F(x)}}\,dx$ (primera especie) $\boxed{\text{es divergente}}$.

Ejercicio 5 Sea $\mathcal{E}$ la elipse definida por la ecuación $4x^2+y^2 = 16$. Se considera un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes, y cuyos cuatro vértices pertenecen a $\mathcal{E}$. ¿Cuál es la mayor área que puede tener dicho rectángulo?

Solución: Se observa (1) que la elipse $\mathcal{E}$ es simétrica respecto a los dos ejes y (2) que todo rectángulo R cuyos vértices pertenecen a $\mathcal{E}$ y cuyos lados son paralelos a los ejes también es simétrico respecto a los ejes:



Así, los vértices del rectángulo R son de la forma (x, y), $(x, -y)$, $(-x, -y)$, $(-x, y)$, con $x \in [0, 2]$ e $y = \sqrt{16 - 4x^2}$, y el área de dicho rectángulo se expresa en función de $x \in [0, 2]$ por

$$A(x) \;=\; 2x \times 2y \;=\; 4x\sqrt{16 - 4x^2} \;=\; 8x\sqrt{4 - x^2}$$

Luego, para maximizar el área del rectángulo R, se necesita determinar el máximo de la función A en el intervalo $[0, 2]$, cuya derivada es dada por

$$A'(x) = 8(4 - x^2)^{1/2} + 8x \times (-2x) \times \frac{1}{2}(4 - x^2)^{-1/2} \;=\; \frac{8(4 - x^2) - 8x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \;=\; \frac{32 - 16x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Se observa que $A'(x) > 0$ cuando $x \in [0,\sqrt{2})$, $A'(\sqrt{2}) = 0$ y $A'(x) < 0$ cuando $x \in (\sqrt{2}, 2]$. Luego, la función A es creciente en $[0, \sqrt{2}]$, decreciente en $[\sqrt{2}, 2]$, y alcanza su máximo en el punto $x_0 = \sqrt{2}$. De tal modo que la mayor área que puede tener el rectángulo R es dada por

$$A(\sqrt{2}) \;=\; 8\sqrt{2} \times \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} \;=\; 8\sqrt{2} \times \sqrt{2} \;=\; \boxed{16}.$$

Primer ejercicio de desarrollo (Total: 25 puntos)

1. Sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Demostrar que si $h'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces la función $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ es constante.

2. Deducir que si $h_1, h_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ son dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) tales que $h_1(a) = h_2(a)$ y $h_1'(x) = h_2'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces estas dos funciones son iguales: $h_1(x) = h_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Solución: véase las notas del curso.

Ahora, se considera una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. En particular, la función f es estrictamente creciente en $[a, b]$, y tiene una función inversa $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$. El objetivo del ejercicio es demostrar que:

$$(*) \qquad \int_a^b f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt \;=\; bf(b) - af(a)$$

Para ello, se consideran las funciones $h_1, h_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$h_1(x) = \int_a^x f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad h_2(x) = xf(x) - af(a)$$

3. Demostrar que las dos funciones $h_1, h_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ son derivables en (a, b), y que tienen derivadas iguales: $h_1'(x) = h_2'(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

Solución: Para calcular la derivada de h_1, se introducen las funciones

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad G(y) = \int_{f(a)}^y f^{-1}(t)\,dt\,,$$

de tal modo que $h_1(x) = F(x) + G(f(x))$. Por el teorema fundamental, tenemos que $F'(x) = f(x)$ (para todo $x \in (a, b)$) y $G'(y) = f^{-1}(y)$ (para todo $y \in (f(a), f(b))$). Luego:

$$h_1'(x) \;=\; F'(x) + f'(x)G'(f(x)) \;=\; f(x) + f'(x)f^{-1}(f(x)) \;=\; f(x) + xf'(x)$$

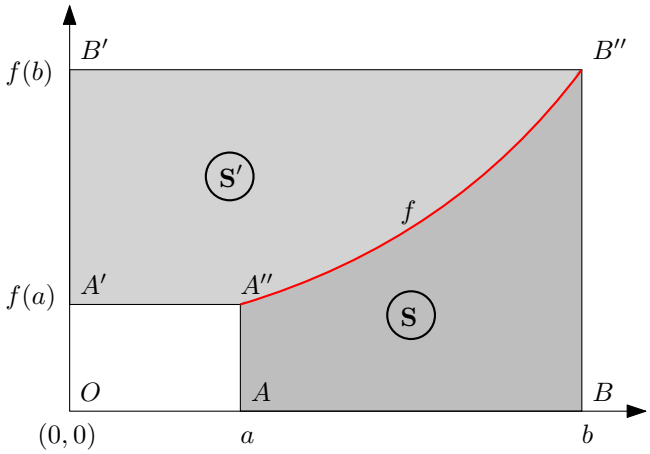
En otro lado, tenemos que $h_2'(x) = (xf(x) - af(a))' = f(x) + xf'(x)$, lo que demuestra que $h_1'(x) = h_2'(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

4. Deducir que $h_1(x) = h_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$, así como la igualdad $(*)$.

Solución: Tenemos que $h_1(a) = F(a) + G(f(a)) = 0 + 0 = 0$ y $h_2(a) = af(a) - af(a) = 0$. Y como $h_1'(x) = h_2'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, obtenemos que $h_1(x) = h_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$ (aplicando el resultado de la pregunta **2.** a las funciones h_1 y h_2). En particular, tenemos que $h_1(b) = h_2(b)$, es decir: la igualdad $(*)$.

5. Dar una interpretación geométrica de la igualdad $(*)$, bosquejando e interpretando los dos sumandos de la izquierda y el término de la derecha.

Solución: En la siguiente figura, se observa que la integral $\int_a^b f(t)\,dt$ corresponde al área de la superficie **S**, mientras la integral $\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,dt$ corresponde al área de la superficie **S′**:



Así, la suma de las dos integrales corresponde exactamente a la diferencia entre el área del (gran) rectángulo $OBB''B'$ y la del (pequeño) rectángulo $OAA''A'$, es decir: $bf(b) - af(a)$.

Segundo ejercicio de desarrollo (Total: 25 puntos)

1. Demostrar que, para todo $x > 0$, la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge a un número > 1.
(Si utiliza algún teorema, enúncielo claramente.)

Solución: Dado $x > 0$ fijado, se observa que

$$\frac{x^{k+1}/(k+1)!}{x^k/k!} = \frac{x}{k+1} \longrightarrow 0 < 1 \qquad \text{(cuando } k \to \infty)$$

Por el criterio de Cauchy, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (cuyo término general es positivo) es convergente. Además, es claro que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \geq 1 + x > 1\,.$$

***

Para todos $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, se considera la suma parcial

$$s_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\,.$$

En lo siguiente, se admite (sin demostrarla) la siguiente propiedad:

$$(*) \qquad s_n(x+y) \;\le\; s_n(x)s_n(y) \;\le\; s_{2n}(x+y) \qquad \text{(para todos } x, y > 0,\ n \in \mathbb{N})$$

Se define la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 1/f(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

2. Usando la propiedad $(*)$, demostrar que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todos $x, y > 0$.

Solución: Sean $x, y > 0$ fijados. Tenemos que $s_n(x+y) \le s_n(x)s_n(y) \le s_{2n}(x+y)$ $(*)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pasando al límite, obtenemos que

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} s_n(x+y)}_{f(x+y)} \;\le\; \underbrace{\lim_{n\to\infty} s_n(x)s_n(y)}_{f(x)f(y)} \;\le\; \underbrace{\lim_{n\to\infty} s_{2n}(x+y)}_{f(x+y)}$$

Luego: $f(x+y) \le f(x)f(y) \le f(x+y)$; es decir: $f(x+y) = f(x)f(y)$.

3. Deducir más generalmente que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Solución: Se necesita distinguir los casos según que $x > 0$, $x = 0$ o $x < 0$ y según que $y > 0$, $y = 0$ o $y < 0$ (lo que nos da $3 \times 3 = 9$ casos):

- $x > 0$, $y > 0$: Ya demostramos la propiedad $f(x+y) = f(x)f(y)$ (con $x, y > 0$) en **2.**
- $x > 0$, $y = 0$: Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x+0) && \text{(pues } y = 0) \\ &= f(x)f(0) && \text{(pues } f(0) = 1) \\ &= f(x)f(y) && \text{(pues } y = 0) \end{aligned}$$

- $x > 0$, $y < 0$: Se distinguen tres subcasos:
  - ⋆ $x + y > 0$: En este subcaso, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) &= f((x+y)+(-y)) && \text{(pues } x = (x+y)+(-y)) \\ &= f(x+y)f(-y) && \text{(por } \mathbf{2.}\text{, pues } x+y, -y > 0) \\ &= f(x+y)/f(y) && \text{(pues } f(y) = f(-(-y)) = 1/f(-y)) \end{aligned}$$

    luego: $f(x+y) = f(x)f(y)$
  - ⋆ $x + y = 0$: En este subcaso, tenemos que $y = -x$, entonces $f(y) = 1/f(x)$. Luego: $f(x)f(y) = 1 = f(0) = f(x+y)$.
  - ⋆ $x + y < 0$: En este subcaso, tenemos que

$$\begin{aligned} f(-y) &= f(-(x+y)+x) && \text{(pues } -y = -(x+y)+x) \\ &= f(-(x+y))f(x) && \text{(por } \mathbf{2.}\text{, pues } -(x+y), x > 0) \end{aligned}$$

    entonces $f(y) = \dfrac{1}{f(-y)} = \dfrac{1}{f(-(x+y))f(x)} = \dfrac{1}{f(-(x+y))} \cdot \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{f(x+y)}{f(x)}$.
    Luego: $f(x)f(y) = f(x+y)$.
- Los otros 6 casos se tratan de modo similar.

4. Demostrar que $0 \leq s_n(x) - 1 \leq x\, f(x)$ para todos $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Como el término general de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ es positivo, la sucesión $(s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de las sumas parciales es creciente. Entonces $s_n(x) \geq s_0(x) = 1$, luego: $s_n(x) - 1 \geq 0$. En otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} s_n(x) - 1 \;\leq\; s_{n+1}(x) - 1 &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= x\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n+1)!}\right) \\ &\leq x\left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) \;=\; x\, s_n(x) \;\leq\; xf(x) \end{aligned}$$

5. Deducir que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Solución: Antes de comenzar, se observa que para todos $x, y > 0$ tales que $x \leq y$, tenemos que $s_n(x) \leq s_n(y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (Esto se demuestra por una inducción obvia sobre n.) Pasando al límite cuando $n \to \infty$, se deduce que $f(x) \leq f(y)$ cuando $x \leq y$. Dicho de otra manera: la función f es creciente en $(0, +\infty)$.

En otro lado, vimos en **4.** que $0 \leq s_n(x) - 1 \leq xf(x)$ para todos $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Pasando de nuevo al límite cuando $n \to \infty$, se deduce que $0 \leq f(x) - 1 \leq xf(x)$ para todo $x > 0$, lo que implica que $|f(x) - 1| \leq xf(x)$ para todo $x > 0$. En particular, tenemos que $|f(x) - 1| \leq xf(x) \leq xf(1)$ para todo $x \in (0, 1]$ (pues f es creciente), lo que implica que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \;=\; 1$$

Además, tenemos que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \;=\; \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{f(-x)} \;=\; \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0^+} f(y)} \;=\; \frac{1}{1} \;=\; 1$$

En conclusión, tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

6. Deducir de lo anterior que la función f es continua en todo punto $a \in \mathbb{R}$.

Solución: Sea $a \in \mathbb{R}$ fijado. Cuando $x \to a$, tenemos que

$$f(x) \;=\; f(a + (x - a)) \;=\; f(a) f(\underbrace{x - a}_{\to\, 0}) \;\longrightarrow\; f(a) \cdot 1 \;=\; f(a) \qquad \text{(cuando } x \to a\text{)}$$

lo que implica que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.