Cálculo I

2do semestre de 2016

Primer parcial

1er de octubre de 2016

N° Parcial	Apellido, Nombre	Firma	Cédula

La duración del parcial es de tres horas y no se permite usar ni calculadora ni material de consulta. La comprensión de las preguntas es parte de la prueba.

Sugerencia: sea cuidadoso al pasar las respuestas.
Lo completado aquí será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.

En esta prueba, se pueden utilizar las derivadas de las funciones usuales ($\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, x^α, e^x, $\log(x)$, etc.) sin justificarlas.

VERDADERO/FALSO (Total: 8 puntos)

1	**2**	**3**	**4**

Llenar cada casilla con las respuestas **V** (verdadero) o **F** (falso), según corresponda.
Correctas: 2 puntos. Incorrectas: -2 puntos. Sin responder: 0 puntos.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 16 puntos)

1	**2**	**3**	**4**

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.
Correctas: 4 puntos. Incorrectas: -1 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 16 puntos)

Un ejercicio de desarrollo se encuentra en la hoja 3: completar en los recuadros.

PARA USO DOCENTE

D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	Total

Ejercicios: Verdadero/Falso (Total: 8 puntos)

1. La imagen de un intervalo abierto $(a,b) \subset \mathbb{R}$ por una función continua $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ siempre es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

2. Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una función derivable en (a,b) tal que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces f es continua y monótona creciente en (a,b).

3. Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es una función continua y acotada, entonces f es uniformemente continua.

4. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n$ es convergente, y $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Ejercicios: Múltiple opción (Total: 16 puntos)

1. ¿Cuál de los siguientes números complejos es una raíz cuarta de $-1-i$?

(A) $\sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{3\pi}{16}}$
(B) $\sqrt[8]{2}\, e^{i\frac{13\pi}{16}}$
(C) $\sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{11\pi}{16}}$
(D) $\sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{16}}$
(E) $\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{16}}$

2. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} e^{\operatorname{sen}(\pi x)} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ si y sólo si:

(A) $a = 0$ y $b = 1$
(B) $a = \frac{1}{4}$ y $b = 0$
(C) $a = \frac{\pi}{4}$ y $b = 1 - \pi$
(D) $a = \frac{e^{\pi}}{4}$ y $b = 1 - e^{\pi}$
(E) $a = \frac{\pi e^{\pi}}{4}$ y $b = 1 - \pi e^{\pi}$

3. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es *falsa*?

(A) $\lim_{x\to 1}\big(\log(x)/(x-1)\big) = 1$
(B) $\operatorname{sen}(1/x)$ no tiene límite cuando x tiende a 0
(C) $\lim_{x\to -1}\big((x^2+2x)/x^3\big) = 1$
(D) $\operatorname{sen}(x)/x$ no tiene límite cuando x tiende a 0
(E) $\lim_{x\to 0}\big((e^{x^2}-1)/x^2\big) = 1$

4. Sea $A = A_1 \cup A_2$, donde $A_1 = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ y $A_2 = \left\{\frac{3}{2}\cos^2(x) : x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\right\}$. Entonces:

(A) $\operatorname{ínf}(A) = 0$ y $\sup(A) = \operatorname{máx}(A) = 1$, pero A no tiene mínimo.
(B) $\operatorname{ínf}(A) = -\frac{\pi}{4}$ y $\sup(A) = \frac{\pi}{4}$, pero A no tiene máximo ni mínimo.
(C) $\operatorname{ínf}(A) = \operatorname{mín}(A) = 0$ y $\sup(A) = \operatorname{máx}(A) = \frac{3}{2}$.
(D) $\operatorname{ínf}(A) = \operatorname{mín}(A) = 0$ y $\sup(A) = \operatorname{máx}(A) = 1$.
(E) $\operatorname{ínf}(A) = 0$ y $\sup(A) = \operatorname{máx}(A) = \frac{3}{2}$, pero A no tiene mínimo.

Ejercicio de desarrollo (Total: 16 puntos)

1. Definir la noción de límite de sucesión: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ si y sólo si ...
2. Definir la noción de supremo en $\mathbb{R}$: $s = \sup(A)$ si y sólo si ...
3. Enunciar el axioma de completitud de $\mathbb{R}$.
4. Demostrar que toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente tiene límite.

Ahora, se considera la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por recurrencia: $\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_{n+1} &= 2 - \dfrac{1}{1+a_n} \end{cases}$

5. Demostrar por inducción completa que $1 \leq a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
6. Demostrar que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente.
7. Deducir que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite L, y hallar el valor de L.

Ejercicio de desarrollo (en caso de ser necesario, continúe al dorso)

Ejercicio de desarrollo (en caso de ser necesario, utilice hojas suplementarias)