Primer Parcial Cálculo 1 - mayo 2005

Parcial No.	Apellido y nombre	Cédula

PRIMER PREGUNTA:

Los irracionales de la forma $q\sqrt{3}$ ...

RESPUESTAS DADAS POR EL ESTUDIANTE

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	–	1	2	3	4
															–				

Puntaje de cada pregunta

2	2	2	1	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	1	–	4	6	4	4

Por si los precisan les damos los valores trigonométricos notables:

ángulo	$0^o = 0$ rad.	$30^o = \frac{\pi}{6}$ rad.	$45^o = \frac{\pi}{4}$ rad.	$60^o = \frac{\pi}{3}$ rad.	$90^o = \frac{\pi}{2}$ rad.
sen	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
cos	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$

Preguntas Verdadero - Falso

Pregunta 1. **(2 puntos)** Los irracionales de la forma $q\sqrt{3}$ con $q \in \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$.

Pregunta 2. **(2 puntos)** Si $A \subset \mathbb{R}$ es acotado y no vacío, y $s = sup(A)$, entonces $\forall \epsilon > 0 \ \exists a \in A \ / \ |s - a| < \epsilon$ y la siguiente es una demostración: Supongo, por el absurdo, que $\exists \epsilon_0 > 0$ tal que $|s - a| \geq \epsilon_0 \ \forall a \in A$. Como además $a \leq s \ \forall a \in A$ (por ser $s = sup(A)$), $a \leq s - \epsilon_0 \ \forall a \in A$, por lo que $s - \epsilon_0$ sería una cota superior de A y $s - \epsilon_0 < s$ contradiciendo que $s = sup(A)$.

Pregunta 3. **(2 puntos)** Si se consideran los complejos z_1, z_2 y z_3 todos de igual módulo y argumentos $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}$ y $\frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{5}$ respectivamente, se cumple que $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3|$.

Pregunta 4. **(1 punto)** Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas que cumplen $f(r) = g(r) \ \forall r \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Pregunta 5. **(2 puntos)** La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\left(sen\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(log\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)}$ converge.

EJERCICIO

Dado $\alpha \in I\!R$, consideramos la sucesión definida por:

$$\begin{cases} x_0 = \alpha \\ x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n} \end{cases}$$

Pregunta 6. **(1 punto)** Si $0 \leq x_n \leq 1$, entonces $\frac{1}{2} \leq x_{n+1} \leq 1$.

Pregunta 7. **(1 punto)** Para $\alpha = 0$, (x_n) es decreciente.

Pregunta 8. **(1 punto)** Para $\alpha = 0$, (x_n) tiene límite 1.

Pregunta 9. **(2 puntos)** Para $\alpha = 5$, (x_n) tiene límite 1. (Se sugiere calcular x_2)

EJERCICIO

Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones reales que cumplen $a_n, b_n \geq 0 \ \forall n \in I\!N$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergen.

Pregunta 10. **(2 puntos)** $\sum_{n=1}^{+\infty} max\{a_n, b_n\}$ necesariamente diverge.

Pregunta 11. **(2 puntos)** $\sum_{n=1}^{+\infty} min\{a_n, b_n\}$ necesariamente diverge.

EJERCICIO

Sea (x_n) una sucesión real. Decimos que (x_n) es de Cauchy sii

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in I\!N \ / \ \forall n, m \geq n_0 \ \text{ se cumple } \ |x_n - x_m| < \epsilon$$

Pregunta 12. **(1 punto)** Si (x_n) es de Cauchy, entonces (x_n) es convergente en $I\!R$.

Pregunta 13. **(1 punto)** La implicancia anterior garantiza la completitud de $I\!R$.

Pregunta 14. **(1 punto)** Si (x_n) es convergente en $I\!R$, entonces (x_n) es de Cauchy.

Pregunta 15. **(1 punto)** La implicancia anterior garantiza la completitud de $I\!R$.

Preguntas Múltiple Opción

Pregunta 1. **(4 puntos)** Se considera $f : [0,1] \to [cos(1), 1] \ / \ f(x) = cos(x^2)$.

(A) f no es invertible.
(B) f es invertible y creciente y su inversa, g, verifica $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$.
(C) f es invertible y decreciente y su inversa, g, verifica $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$.
(D) f es invertible y creciente y su inversa, g, verifica $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
(E) f es invertible y decreciente y su inversa, g, verifica $g(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Pregunta 2. **(6 puntos)** Consideramos la siguiente **afirmación**:

Si $f : [a,b] \to I\!R$ es continua, entonces $\exists\, K \in I\!R \ / \ f(x) \leq K \ \ \forall\, x \in [a,b]$.

y la siguiente **demostración**:

Paso 1 : Por el absurdo, si no se cumple la tesis se tiene que $\forall\, n \in I\!N \ \ \exists\, x_n \in [a,b] \ / \ f(x_n) > n$, definiéndose así una sucesión (x_n).

Paso 2 : Como $x_n \in [a,b] \ \forall\, n \in I\!N$, la sucesión (x_n) es acotada y por lo tanto $\exists\, (x_{n_k})$ subsucesión[1] convergente. Sea L el límite de (x_{n_k}).

Paso 3 : Como $x_n \in [a,b] \ \forall\, n \in I\!N$, $L \in [a,b]$ y por ser f continua se concluye que $f(x_{n_k})$ converge a $f(L)$ lo cual contradice que $f(x_{n_k}) > n_k \ \ \forall\, k \in I\!N$.

(A) La afirmación es falsa.
(B) La afirmación es verdadera, la demostración es correcta.
(C) La afirmación es verdadera, la demostración es incorrecta pues el *Paso 1* contiene al menos un error.
(D) La afirmación es verdadera, la demostración es incorrecta pues el *Paso 2* contiene al menos un error.
(E) La afirmación es verdadera, la demostración es incorrecta pues el *Paso 3* contiene al menos un error.

[1] Las subsucesiones son también llamadas sucesiones parciales

Pregunta 3. **(4 puntos)** En un sistema ortogonal de coordenadas del plano, el rotado con centro en $(1,1)$ y ángulo $\frac{\pi}{4}$ antihorario del punto $(4,2)$ es el punto:

(A) $(2\sqrt{2},4)$ (B) $(2,3\sqrt{2})$ (C) $(1+\sqrt{2},1+2\sqrt{2})$
(D) $(2,1+2\sqrt{2})$ (E) $(2\sqrt{2},3\sqrt{2})$

Pregunta 4. **(4 puntos)** Se considera el polinomio $P(z) = z^4 - 6z^3 + 15z^2 - 18z + 10$, del cual se sabe que $2-i$ es raíz. El producto de las raíces con parte imaginaria positiva es:

(A) $-1+i$ (B) $1+3i$ (C) $2+5i$ (D) $2-i$ (E) $4+i$