Primer Parcial de Cálculo 1.
Curso 2009

Sábado 9 de mayo de 2009.

No. Parcial	Apellido y nombre	Cédula de Identidad

RESPUESTAS (llenar)						No llenar
1	2	3	4	5	6	7
(A)	(D)	(B)	(C)	(B)	(D)	

El parcial es sin material (ni calculadoras ni libros ni apuntes) y dura 3 horas.
Puntajes: 5 puntos cada ejercicio múltiple opción 10 puntos el de desarrollo. No se restan puntos. [1]

Ejercicio 1.
Se considera la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 1/2, \\ a_{n+1} = (1/3)(2-a_n)(2+a_n)a_n, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Indicar la opción correcta:

(A) a_n es creciente estricta y su límite vale 1.

(B) a_n es creciente estricta y no acotada.

(C) a_n es decreciente estricta y su límite vale 0.

(D) a_n es monótona y su límite vale 3/4.

(E) a_n no es monótona y su límite vale 1.

Solución:Para que a_n tenga límite entonces a_{n+1} debe tener y deben ser iguales a cierto A. Entonces resolvemos $\frac{(2-A)(2+A)A}{3} = A$ al cancelar A estoy diciendo que 0 es una posibilidad, luego tengo $\frac{(2-A)(2+A)}{3} = 1$ $\Rightarrow (2-A)(2+A) = 3 \Rightarrow A^2 = 1$ entonces 1 y -1 son los otros posibles límites.

Se que las sucesiones que se consideran cumplen $-1 \leq a_1 \leq 1$, supongo ahora que $-1 \leq a_n \leq 1$. Estudiamos el signo de $f(a_n) = \frac{(2-a_n)(2+a_n)a_n}{3} - 1$ vemos que tiene raíces 1 y -1 y es negativa en ese intervalo, entonces como supusimos que $-1 \leq a_n \leq 1$ se cumple que $\frac{(2-a_n)(2+a_n)a_n}{3} \leq 1$ o sea que $a_{n+1} \leq 1$. Analogamente pruebo que $-1 \leq a_n$. O sea que por inducciín completa probamos que las sucesiones se mantienen en ese intervalo.

Se puede ver que si a_n esta entre 0 y 1 entonces decrecera y entre -1 y 1 crecera, ya que al estudiar el signo de $a_n - a_{n+1}$ tiene signo positivo entre 0 y 1 y negativo entre -1 y 0. Entonces si $a_1 = \frac{1}{2}$ es creciente y acotada superiormente, por lo que tiene límite y sólo puede valer 1.

Ejercicio 2.
Sean x e y dos números irracionales positivos y z un número racional positivo ($z > 0$).

Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $x + y$ es necesariamente irracional.

[1] Toda la información extra sobre el parcial será publicada en la web *http://sites.google.com/site/calculo12009/*

(II) $x.y$ es necesariamente irracional.

(III) $z.x$ es necesariamente irracional.

Indicar la opción correcta:

(A) Sólo (I) y (II) son verdaderas.

(B) Sólo (I) y (III) son verdaderas.

(C) Sólo (II) es verdadera.

(D) Sólo (III) es verdadera.

(E) Las tres afirmaciones son verdaderas.

Solución: (I) es falso y un contraejemplo es $x = 2 - \sqrt{2}, y = 2 + \sqrt{2}$, (II) también es falso y un contraejemplo es $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2}$. Por último (III) es verdadera ya que por absurdo si $z.x$ fuera un racional z', entonces x sería igual a z'/z que es un racional ya que la división de racionales es racional, contradiciendo la irracionalidad de x.

Ejercicio 3.
Sea $\exp(x) = e^x$. Entonces el valor de la integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(x) sen(7x) dx$$

es:

(A) 0.

(B) $-[\exp(\pi/2) + \exp(-\pi/2)]/50$.

(C) $[1 + \exp(\pi/2) + \exp(-\pi/2)]/60$.

(D) $[1 - \exp(\pi/2) + \exp(-\pi/2)]/70$.

(E) $1 + \exp(\pi/2)/80$.

Solución:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen}(7x) dx = e^x \operatorname{sen}(7x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 7\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(7x) dx = -e^{\pi/2} - e^{-\pi/2} - 7e^x \cos(7x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 49\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen}(7x) dx$$

$$\Rightarrow 50I = -e^{\pi/2} - e^{-\pi/2} - 7(0-0) \Rightarrow I = -\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}}{50}.$$

Ejercicio 4.
El valor de la integral

$$\int_1^2 \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}\, dx$$

es:

(A) $1/2 + \operatorname{arc\,tg}(2) - \pi/4$.

(B) $1/2 + (3/2)\left[\operatorname{arc\,tg}(4) - \operatorname{arc\,tg}(3)\right]$.

(C) $1/4 + (3/2)\left[\operatorname{arc\,tg}(3) - \operatorname{arc\,tg}(2)\right]$.

(D) $1/2 + (3/2)\left[\operatorname{arc\,tg}(2) - \operatorname{arc\,tg}(1)\right]$.

(E) $1/4 + \operatorname{arc\,tg}(2) - \pi/4$.

Solución:

$$\int_1^2 \frac{2x^2+x+1}{x^4+2x^3+2x^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx + \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}(-1)x^{-1}|_1^2 + \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}(x+1)|_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}(\operatorname{arc\,tg} 3 - \operatorname{arc\,tg} 2)$$

Ejercicio 5.
Resolver la ecuación diferencial

$$y' + y = cos(x),$$

con la condición inicial

$$y(0) = \frac{1}{2}.$$

Indicar la opción correcta.

(A) $y(\pi/2) = 1$. (B) $y(\pi/2) = 1/2$. (C) $y(\pi/2) = 2$. (D) $y(\pi/2) = 0$. (E) $y(\pi/2) = -1$.

Solución: De lo visto en el teórico tenemos que $y = e^{A(x)}(K + B(x))$ Siendo $A(x) = \int -1dx = -x$. y

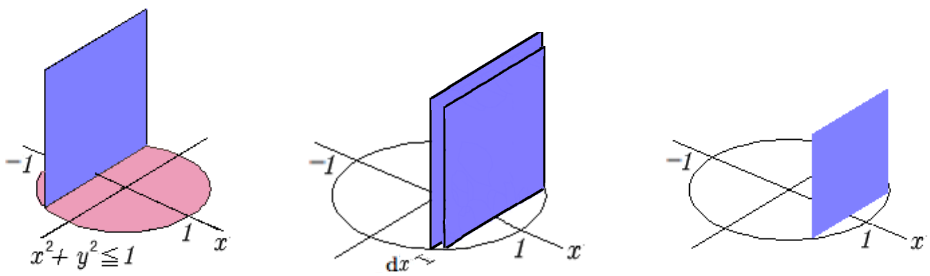
$$B(x) = \int \cos(x)e^x dx = e^x \cos x - \int e^x(-\operatorname{sen} x)dx = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx$$

De donde $B(x) = (e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x)/2$ y $K = (1/2)/e^{A(0)} - B(0) = (1/2)e^0 - 1/2 = 0$. De donde

$$y = e^{-x}(\frac{e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2}) = \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{2}.$$

y $y(\pi/2) = (0+1)/2 = 1/2$

Ejercicio 6.
Considere el sólido cuya cara inferior es el círculo dado por la desigualdad $x^2 + y^2 \leq 1$ (es decir, el círculo de centro el origen y radio 1) y cuyas secciones transversales perpendiculares al eje $O\vec{x}$ son cuadradas. Ver Figuras. Hallar el volumen V del sólido. (*Sugerencia:* usar sumas de Riemann)



Indique la opción correcta:

(A) $V = 2\pi$. (B) $V = 4/3$. (C) $V = 8/5$ (D) $V = 16/3$. (E) $V = 16\pi/3$.

Solución:

Dividiendo el intervalos de las x entre -1 y 1 en n partes iguales a dx y viendo las secciones verticales correspondientes, éstas serán iguales a $(2\sqrt{(}1-\xi_i^2))^2 dx$. Sumando y haciendo tender n a infinito, tenemos que el volumen será

$$V = \int_{-1}^{1} 4(1-x^2)dx = 4(x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-1}^{1} = 4(1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}) = 16/3$$

Ejercicio de desarrollo

Ejercicio 7.

a) Demostrar que si f es una función integrable Riemann en $[a,b]$ y F una primitiva de f, entonces vale la regla de Barrow:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

b) Demostrar que si $q \neq 1$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - q}{q-1}.$$

c) Sea $f(x) = e^x$.

c1) Calcular la integral de f en $[0,1]$ y las sumas inferior y superior, $s(f,n)$ y $S(f,n)$, de f en $[0,1]$.

c2) Deducir comparando los resultados de c1) que

$$1 \leq n(e^{1/n} - 1) \leq e^{1/n} \qquad \forall n \geq 1.$$

c3) A partir de c2) calcular

$$\lim_{n\to+\infty} n(e^{1/n} - 1).$$

Solución: a) se vió en el Teórico.

b) Por inducción: Si $n = 1$ entonces $q = (q^2 - q)/(q-1)$. Asumiendo la fórmula válida para n, entonces

$$\sum_{i=1}^{n+1} q^i = q^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} q^i = q^{n+1} + \frac{q^{n+1} - q}{q-1} = \frac{q^{n+2} - q^{n+1} + q^{n+1} - q}{q-1} = \frac{q^{n+2} - q}{q-1}.$$

También directamente:

$$x = \sum_{i=1}^{n} q^i = q + q^2 + \cdots + q^n = q + q(q + \cdots + q^{n-1}) = q + q(x - q^n) = q + qx - q^{n+1}.$$

por lo tanto $x(1-q) = q - q^{n+1}$, de donde $x = (q - q^{n+1})/(1-q) = (q^{n+1} - q)/(q-1)$.

c1)

$$\int_0^1 e^x dx = e^x|_0^1 = e - 1, \qquad s(f,n) = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i-1}{n}} \frac{1}{n}, \qquad S(f,n) = \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} \frac{1}{n}.$$

c2) Sabemos que $s(f,n) \leq \int_0^1 f \leq S(f,n)$, de donde

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i-1}{n}} \frac{1}{n} \leq e - 1 \leq \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} \frac{1}{n}$$

Por otra parte

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i-1}{n}} = \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i} = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \frac{(e^{\frac{1}{n}})^{n+1} - e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{(e^{\frac{1}{n}})^{n} - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} e^{\frac{i}{n}} = \sum_{i=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i} = \frac{(e^{\frac{1}{n}})^{n+1} - e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = \frac{e^{1+\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e^{\frac{1}{n}} \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Finalmente comparando tenemos:

$$\frac{1}{n} \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \leq e - 1 \leq \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

de donde $1 \leq n(e^{\frac{1}{n}} - 1) \leq e^{\frac{1}{n}}$ como se quería demostrar.

c3) Tomando límite cuando $n \to +\infty$, tenemos que $\lim e^{\frac{1}{n}} = 1$, por lo que $n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$ esta entre dos sucesiones que tienen el mismo límite, por lo que $n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$ tiene límite y es 1.