Primer Parcial de Cálculo 1.
Curso 2009

Sábado 9 de mayo de 2009.

No. Parcial	Apellido y nombre	Cédula de Identidad

RESPUESTAS (llenar)						No llenar
1	2	3	4	5	6	7

El parcial es sin material (ni calculadoras ni libros ni apuntes) y dura 3 horas.
Puntajes: 5 puntos cada ejercicio múltiple opción 10 puntos el de desarrollo. No se restan puntos. [1]

Ejercicio 1.
Se considera la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 1/2, \\ a_{n+1} = (1/3)(2-a_n)(2+a_n)a_n, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Indicar la opción correcta:

(A) a_n es creciente estricta y su límite vale 1.

(B) a_n es creciente estricta y no acotada.

(C) a_n es decreciente estricta y su límite vale 0.

(D) a_n es monótona y su límite vale 3/4.

(E) a_n no es monótona y su límite vale 1.

Ejercicio 2.
Sean x e y dos números irracionales positivos y z un número racional positivo ($z > 0$).

Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) $x + y$ es necesariamente irracional.

(II) $x.y$ es necesariamente irracional.

(III) $z.x$ es necesariamente irracional.

Indicar la opción correcta:

(A) Sólo (I) y (II) son verdaderas.

(B) Sólo (I) y (III) son verdaderas.

(C) Sólo (II) es verdadera.

(D) Sólo (III) es verdadera.

(E) Las tres afirmaciones son verdaderas.

Ejercicio 3.
Sea $\exp(x) = e^x$. Entonces el valor de la integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(x) sen(7x) dx$$

es:

(A) 0.

(B) $-[\exp(\pi/2) + \exp(-\pi/2)]/50$.

(C) $[1 + \exp(\pi/2) + \exp(-\pi/2)]/60$.

(D) $[1 - \exp(\pi/2) + \exp(-\pi/2)]/70$.

(E) $1 + \exp(\pi/2)/80$.

Ejercicio 4.
El valor de la integral

$$\int_1^2 \frac{2x^2 + x + 1}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}\, dx$$

es:

(A) $1/2 + \operatorname{arc\,tg}(2) - \pi/4$.

(B) $1/2 + (3/2)\left[\operatorname{arc\,tg}(4) - \operatorname{arc\,tg}(3)\right]$.

(C) $1/4 + (3/2)\left[\operatorname{arc\,tg}(3) - \operatorname{arc\,tg}(2)\right]$.

(D) $1/2 + (3/2)\left[\operatorname{arc\,tg}(2) - \operatorname{arc\,tg}(1)\right]$.

(E) $1/4 + \operatorname{arc\,tg}(2) - \pi/4$.

[1] Toda la información extra sobre el parcial será publicada en la web *http://sites.google.com/site/calculo12009/*

Ejercicio 5.
Resolver la ecuación diferencial

$$y' + y = cos(x),$$

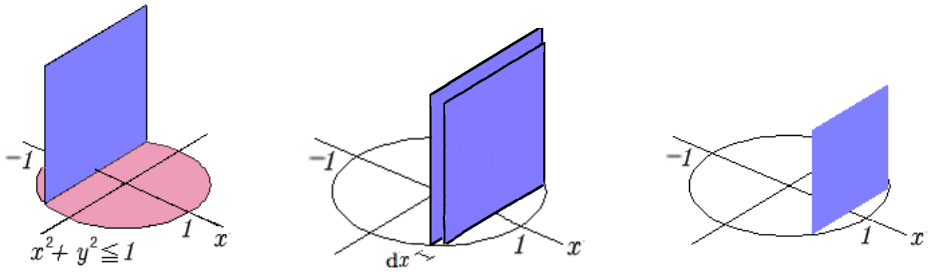
con la condición inicial

$$y(0) = \frac{1}{2}.$$

Indicar la opción correcta.

(A) $y(\pi/2) = 1$. (B) $y(\pi/2) = 1/2$. (C) $y(\pi/2) = 2$. (D) $y(\pi/2) = 0$. (E) $y(\pi/2) = -1$.

Ejercicio 6.
Considere el sólido cuya cara inferior es el círculo dado por la desigualdad $x^2 + y^2 \leq 1$ (es decir, el círculo de centro el origen y radio 1) y cuyas secciones transversales perpendiculares al eje $O\vec{x}$ son cuadradas. Ver Figuras. Hallar el volumen V del sólido. (*Sugerencia:* usar sumas de Riemann)



Indique la opción correcta:

(A) $V = 2\pi$. (B) $V = 4/3$. (C) $V = 8/5$ (D) $V = 16/3$. (E) $V = 16\pi/3$.

Ejercicio de desarrollo

Ejercicio 7.
a) Demostrar que si f es una función integrable Riemann en $[a, b]$ y F una primitiva de f, entonces vale la regla de Barrow:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

b) Demostrar que si $q \neq 1$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}.$$

c) Sea $f(x) = e^x$.
c1) Calcular la integral de f en $[0, 1]$ y las sumas inferior y superior, $s(f, n)$ y $S(f, n)$, de f en $[0, 1]$.
c2) Deducir comparando los resultados de c1) que

$$1 \leq n(e^{1/n} - 1) \leq e^{1/n} \qquad \forall n \geq 1.$$

c3) A partir de c2) calcular

$$\lim_{n \to +\infty} n(e^{1/n} - 1).$$