Primer Parcial de Cálculo 1

Sábado 10 de mayo de 2008.

No. Parcial

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Ejercicios de múltiple opción (total 30 puntos).
Puntaje: Correctas: 5 puntos; Incorrectas: - 1 punto. ; Sin responder: 0 punto.

Ejercicio 1.
Considere la siguiente ecuación:

$$\log x + \frac{1}{x} - 2 = 0$$

y las siguientes afirmaciones:

(I) Existe alguna solución de la ecuación en el intervalo $(0, 1)$.

(II) Existe alguna solución de la ecuación en el intervalo $(1, e^3)$.

(III) Existe alguna solución de la ecuación en la semirecta $(e^3, +\infty)$.

Indicar la opción correcta:

(A) Sólo la afirmación (I) es verdadera.

(B) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.

(C) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.

(D) Sólo la afirmación (III) es verdadera.

(E) Ninguna de las afirmaciones es verdadera.

Ejercicio 2.
Se considera la siguiente afirmación:
Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple:

(i) f *es continua en todo* $\mathbb{R}$,

(ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, *(L finito).*

Entonces f *es uniformemente continua en todo* $\mathbb{R}$.

Se considera también la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Indicar la opción correcta:

(A) La afirmación es verdadera y es aplicable a f pues cumple (i) y (ii).

(B) La afirmación es verdadera pero no es aplicable a f pues esta cumple (i) pero no cumple (ii).

(C) La afirmación es verdadera pero no es aplicable a f pues esta cumple (ii) pero no cumple (i).

(D) La afirmación no es verdadera y la función f es un contraejemplo porque cumple (i) y (ii) pero no es uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$.

(E) La afirmación no es verdadera y además la función f no cumple al menos una de las hipótesis.

Ejercicio 3.
Se considera la función $f(x) = e^{-x}$. Sea $A(x_0)$ el área del triángulo que forman la recta tangente al gráfico de f por el punto (x_0, e^{-x_0}) y los ejes $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}$. Para $x_0 \geq 0$ el máximo valor de $A(x_0)$ es:

(A) $A_{max} = 1/2$.

(B) $A_{max} = 1$.

(C) $A_{max} = 2/e$.

(D) $A_{max} = 4/e$.

(E) $A(x_0)$ no está acotada superiormente.

Ejercicio 4.
Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 3$ y $f'(1/2) = 1$. Entonces:

(A) Si existe una cantidad par de puntos en los que la derivada de f se anula, entonces la función alcanza su máximo o su mínimo en $(0,1)$.

(B) El máximo de f es 3.

(C) Existe $c \in (0,1)$ tal que $f'(c) > 3$.

(D) Si existe una cantidad impar de puntos en los que la derivada de f se anula, entonces la función alcanza su máximo o su mínimo en $(0,1)$.

(E) Existe $x \in (0,1]$ tal que $f(x) = x$.

Ejercicio 5.
Se considera la función definida en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ dada por la fórmula

$$f(x) = \frac{1 - \cos(e^x - 1)}{x^2},$$

y se desea definirla en 0 de manera que quede continua. Entonces:

(A) Debe ser $f(0) = 0$.

(B) Debe ser $f(0) = 2$.

(C) Debe ser $f(0) = \frac{1}{2}$.

(D) Debe ser $f(0) = 1$.

(E) No se puede definir $f(0)$ de manera que f resulte continua en 0.

Ejercicio 6.
Cosideremos la siguiente condición:

$$z^2 = \bar{z} \qquad z \in \mathbb{C} \qquad (*)$$

y las siguientes afirmaciones:

(I) Hay 4 complejos que satisfacen la condición $(*)$.

(II) Existen complejos v y w distintos, que cumplen la condición $(*)$ y $v = \bar{w}$.

(III) La multiplicación de todos los complejos que satisfacen la condición $(*)$ da 1.

Indicar la opción correcta:

(A) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.

(B) Las tres afirmaciones son verdaderas.

(C) Sólo la afirmación (III) es verdadera.

(D) Sólo la afirmación (II) es verdadera.

(E) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

Primer Parcial de Cálculo 1

Sábado 10 de mayo de 2008.

No. Parcial

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Ejercicio de desarrollo

Puntaje: 10 puntos

a) Definir supremo de un conjunto y enunciar el axioma de completitud.

b) Probar que toda sucesión no decreciente acotada superiormente tiene límite.

c) Sea una sucesión definida por recurrencia donde $x_1 \in (-1, 0)$, y $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n} - 1$.

  (i) Probar por inducción que $x_n \in (-1, 0)$.

  (ii) Probar que es monótona creciente.

  (iii) Concluir que es convergente.

  (iv) Hallar el límite de la sucesión.

Escribir la solución detallada a continuación: