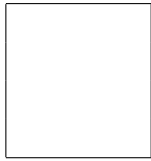


Primer Parcial de Cálculo 1

Sábado 10 de mayo de 2008.



No. Parcial

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Ejercicios de múltiple opción (total 30 puntos).

Puntaje: Correctas: 5 puntos; Incorrectas: - 1 punto. ; Sin responder: 0 punto.

Ejercicio 1.

Considere la siguiente ecuación:

$$\log x + \frac{1}{x} - 2 = 0$$

y las siguientes afirmaciones:

- (I) Existe alguna solución de la ecuación en el intervalo $(0, 1)$.
- (II) Existe alguna solución de la ecuación en el intervalo $(1, e^3)$.
- (III) Existe alguna solución de la ecuación en la semirecta $(e^3, +\infty)$.

Indicar la opción correcta:

- (A) Sólo la afirmación (I) es verdadera.
- (B) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.
- (C) Sólo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.
- (D) Sólo la afirmación (III) es verdadera.
- (E) Ninguna de las afirmaciones es verdadera.

Ejercicio 2.

Se considera la siguiente afirmación:

Sea una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple:

(i) f es continua en todo \mathbb{R} ,

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, (L finito).

Entonces f es uniformemente continua en todo \mathbb{R} .

Se considera también la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Indicar la opción correcta:

- (A) La afirmación es verdadera y es aplicable a f pues cumple (i) y (ii).
- (B) La afirmación es verdadera pero no es aplicable a f pues esta cumple (i) pero no cumple (ii).
- (C) La afirmación es verdadera pero no es aplicable a f pues esta cumple (ii) pero no cumple (i).
- (D) La afirmación no es verdadera y la función f es un contraejemplo porque cumple (i) y (ii) pero no es uniformemente continua en todo \mathbb{R} .
- (E) La afirmación no es verdadera y además la función f no cumple al menos una de las hipótesis.

Ejercicio 3.

Se considera la función $f(x) = e^{-x}$. Sea $A(x_0)$ el área del triángulo que forman la recta tangente al gráfico de f por el punto (x_0, e^{-x_0}) y los ejes \vec{Ox} , \vec{Oy} . Para $x_0 \geq 0$ el máximo valor de $A(x_0)$ es:

- (A) $A_{max} = 1/2$.
- (B) $A_{max} = 1$.
- (C) $A_{max} = 2/e$.
- (D) $A_{max} = 4/e$.
- (E) $A(x_0)$ no está acotada superiormente.

Ejercicio 4.

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 3$ y $f'(1/2) = 1$. Entonces:

- (A) Si existe una cantidad par de puntos en los que la derivada de f se anula, entonces la función alcanza su máximo o su mínimo en $(0, 1)$.
- (B) El máximo de f es 3.
- (C) Existe $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) > 3$.
- (D) Si existe una cantidad impar de puntos en los que la derivada de f se anula, entonces la función alcanza su máximo o su mínimo en $(0, 1)$.
- (E) Existe $x \in (0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

Ejercicio 5.

Se considera la función definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ dada por la fórmula

$$f(x) = \frac{1 - \cos(e^x - 1)}{x^2},$$

y se desea definirla en 0 de manera que quede continua. Entonces:

- (A) Debe ser $f(0) = 0$.
- (B) Debe ser $f(0) = 2$.
- (C) Debe ser $f(0) = \frac{1}{2}$.

(D) Debe ser $f(0) = 1$.

(E) No se puede definir $f(0)$ de manera que f resulte continua en 0.

Ejercicio 6.

Cosideremos la siguiente condición:

$$z^2 = \bar{z} \quad z \in \mathbb{C} \quad (*)$$

y las siguientes afirmaciones:

- (I) Hay 4 complejos que satisfacen la condición (*).
- (II) Existen complejos v y w distintos, que cumplen la condición (*) y $v = \bar{w}$.
- (III) La multiplicación de todos los complejos que satisfacen la condición (*) da 1.

Indicar la opción correcta:

- (A) Sólo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.
- (B) Las tres afirmaciones son verdaderas.
- (C) Sólo la afirmación (III) es verdadera.
- (D) Sólo la afirmación (II) es verdadera.
- (E) Sólo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

Primer Parcial de Cálculo 1

Sábado 10 de mayo de 2008.

No. Parcial

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Ejercicio de desarrollo

Puntaje: 10 puntos

- a) Definir supremo de un conjunto y enunciar el axioma de completitud.
- b) Probar que toda sucesión no decreciente acotada superiormente tiene límite.
- c) Sea una sucesión definida por recurrencia donde $x_1 \in (-1, 0)$, y $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} - 1$.
 - (i) Probar por inducción que $x_n \in (-1, 0)$.
 - (ii) Probar que es monótona creciente.
 - (iii) Concluir que es convergente.
 - (iv) Hallar el límite de la sucesión.

Escribir la solución detallada a continuación: