Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

Examen - 26 de julio de 2014 Duración: 3 horas y media

N° de lista	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Múltiple opción (Total: 50 puntos)

En cada pregunta hay una sola opción correcta.

Respuesta correcta: 10 puntos **Respuesta incorrecta: -2,5 puntos** **No responde: 0 punto**

Ejercicio 1.
Sean $a \in \mathbb{R}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $z = x + iy$, la ecuación

$$z\bar{z} + z_0\bar{z} + \bar{z}_0 z + a = 0$$

representa en el plano xy:

(A) una circunferencia si y solo si $|z_0|^2 - a > 0$

(B) dos rectas si y solo si $a < 0$

(C) el conjunto vacío si y solo si $|z_0|^2 - a = 0$

(D) un punto si y solo si $z_0 = 0$

(E) ninguna de las otras respuestas es cierta

Ejercicio 2.
Para $n \in \mathbb{N}$ se definen

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^{n+1}}\, dx \quad \text{y} \quad b_n = \frac{1}{n} - a_n$$

Consideremos las series,

$$\text{(I)} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{y} \quad \text{(II)} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

Entonces,

(A) Ambas series convergen

(B) (I) converge y (II) diverge

(C) (I) diverge y (II) converge

(D) Ambas series divergen

(E) (I) oscila y (II) converge

Ejercicio 3.
Sean $f(x) = (x-1)^3 + e^{-2x} - x$, $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + ax^2 + bx^3}{x^4} = \frac{2}{3}$$

Entonces, f presenta en $x = 0$

(A) un máximo, $a = b = \frac{1}{3}$

(B) un mínimo, $a = b = 1$

(C) un punto de inflexión, $a = 1$ y $b = \frac{1}{3}$

(D) un máximo, $a = 1$ y $b = \frac{1}{3}$

(E) un mínimo, $a = 1$ y $b = \frac{1}{3}$

Ejercicio 4.
Sea

$$F(x) = \int_\pi^x \frac{e^t}{3 + \operatorname{sen} t}\, dt$$

El valor de $(F^{-1})'(0)$ es

(A) $3e^{-\pi}$ (B) $3e^{\pi}$ (C) e^{π} (D) $\frac{1}{3}e^{\pi}$ (E) $+\infty$

Ejercicio 5.
Consideremos las series,

$$\text{(I)} \sum_{2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^3 - 1}} \quad \text{y} \quad \text{(II)} \sum_{1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Entonces,

(A) (I) converge absolutamente y (II) diverge

(B) (I) converge absolutamente y (II) converge

(C) (I) converge y (II) oscila

(D) Ambas series divergen

(E) Ambas convergen absolutamente

Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL **Cálculo 1**

EXAMEN- 26 DE JULIO DE 2014 DURACIÓN: 3 HORAS Y MEDIA

N° de lista	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Desarrollo (Total: 50 puntos) Justificar las respuestas.

PARA USO DOCENTE

1	2	TOTAL

Ejercicio 1.
(30 puntos)

a) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y $a \in \mathbb{R}$. Si $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable, probar que la función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$G(x) = \int_a^{\alpha(x)} f(t)\, dt$$
es derivable en x, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ y hallar $G'(x)$ en función de f (no demostrar los resultados previos que se usan en la prueba).

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Se define $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por
$$F(x) = \begin{cases} \int_0^1 f(\frac{t}{x})\, dt & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

i) Probar que F es derivable en x, para todo $x \neq 0$ y hallar, en función de f, $F'(x)$.
Sugerencia: hacer el cambio de variable $w = \frac{t}{x}$.

ii) Para el caso particular en que $f(u) = \frac{\operatorname{sen} u}{1+u^2}$ probar que F es derivable en x, para todo $x \in \mathbb{R}$, y que $-\frac{\pi}{2} \leq F'(0) \leq \frac{\pi}{2}$.
Sugerencia: para el estudio en $x = 0$, se recomienda escribir el cociente incremental respectivo.

Ejercicio 2.
(20 puntos)
Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que:
i) $\forall\ a \in A$ y $\forall\ b \in B$, $a \leq b$,
ii) $\forall\ \epsilon > 0$, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $b - a < \epsilon$.

a) Demostrar que A y B tienen supremo e ínfimo respectivamente y que ambos números coinciden.

b) Sean $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$ y $B = \left\{x \in \mathbb{R} : x = 1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$. Probar que A y B son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ y que verifican i) y ii). Calcular el supremo de A y el ínfimo de B y verificar que coinciden.