Resolución Primer Parcial Cálculo 1

14 de Mayo de 2014

VERSIÓN 1

---

1. Ejercicio 1

Dado un $w \in \mathbb{C}$ fijo, queremos ver qué pasa con el conjunto:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z^3 \text{ es raíz cuadrada de } w \right\}$$

Los complejos que se encuentran en el conjunto A verifican:

$$\left(z^3\right)^2 = w \Leftrightarrow z^6 = w \Leftrightarrow z = w^{\frac{1}{6}} \tag{1.1}$$

Si se escriben z y w en notación polar:

$$\begin{aligned} w &= \rho e^{i(\varphi + 2k\pi)} \\ z &= r e^{i\theta} \end{aligned}$$

1.1 queda:

$$r e^{i\theta} = \rho^{\frac{1}{6}} e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{6}}$$

De donde:

$$\begin{aligned} r &= \rho^{\frac{1}{6}} \\ \theta_k &= \frac{\varphi + 2k\pi}{6} \end{aligned}$$

Por lo tanto, todos los elementos de A se encuentran sobre la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\rho^{\frac{1}{6}}$. Además, la separación entre 2 elementos consecutivos es $\frac{2\pi}{6}$ rad $= \frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$. Entonces, en el plano complejo, los elementos de A forman un hexágono regular.

2. Ejercicio 2

(I) **Paso Base:** Con $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \text{ y } 1 - \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

Paso Inductivo 1. *Hipótesis:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Tesis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^i} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= 1 - \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2}\right) \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^i} &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

□

(II) **Paso Base:** Con $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1$$

Que no es mayor que $\sqrt{n} = 1$, por lo que la propiedad no es cierta para $n = 1$. Para $n = 2$:

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{i}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Para ver si eso es más grande que $\sqrt{n} = \sqrt{2}$, se puede escribir:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2} + 1 - 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$$

Entonces, $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ se puede escribir como $\sqrt{2}$ más algo positivo ($\sqrt{2} - 1$ es positivo ya que $\sqrt{2} > 1$), por lo que efectivamente la propiedad (II) es cierta para $n = 2$.

Paso Inductivo 2. *Hipótesis:*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$$

Tesis:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n+1}$$

Demostración.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

De nuevo, para ver si a lo que se llegó es mayor que $\sqrt{n+1}$, se puede escribir:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \sqrt{n+1} + \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} \\
&= \sqrt{n+1} + \frac{\sqrt{n(n+1)} + 1 - n - 1}{\sqrt{n+1}} \\
\Rightarrow \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &= \sqrt{n+1} + \frac{\sqrt{n(n+1)} - n}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

El término $\sqrt{n(n+1)} = \sqrt{n^2+n}$ es mayor que $\sqrt{n^2} = n$, por lo que:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n+1}$$

□

3. Ejercicio 3

De la definición de los conjuntos puede verse que los elementos de A_1 son siempre negativos, mientras que los de A_2 son positivos. Entonces, si A_1 y A_2 están acotados resulta $\text{ínf}(A) = \text{ínf}(A_1)$ y $\sup(A) = \sup(A_2)$,

Además, la sucesión $\frac{1}{2n-1} - 1$ tiende a -1 cuando $n \to +\infty$ y es decreciente, por lo que $\text{ínf}(A) = \text{ínf}(A_1) = -1$, pero no tiene mínimo. Análogamente, la sucesión $\frac{1}{2n} + 1$ tiende a 1 cuando $n \to +\infty$ y es decreciente, por lo que $\sup(A) = \sup(A_2) = \frac{3}{2}$ y además es máximo.

4. Ejercicio 4

Por teorema de la derivada de la función inversa:

$$\left[\cosh^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{\cosh'(\cosh^{-1}(x))}$$

La derivada del coseno hiperbólico es:

$$[\cosh(x)]' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

La fórmula de seno hiperbólico puede obtenerse de la ecuación:

$$\begin{aligned}
\cosh^2(y) - \sinh^2(x) = 1 \Leftrightarrow \sinh(x) &= \sqrt{\cosh^2(x) - 1} \\
\sinh(x) &= \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - 1} \\
\sinh(x) &= \sqrt{\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}\right) - 1} \\
\sinh(x) &= \sqrt{\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4}\right)} \\
\sinh(x) &= \sqrt{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2} \\
\Rightarrow \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\left[\cosh^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{\sinh(\cosh^{-1}(x))}$$

Pero:

$$\sinh(y) = \sqrt{\cosh^2(y) - 1} \Rightarrow \sinh(\cosh^{-1}(x)) = \sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1}(x)) - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

Finalmente, la derivada de la función inversa del coseno hiperbólico es:

$$\left[\cosh^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

5. Ejercicio 5

Para estudiar la derivada de $g(x)$ en $x = 0$ se debe mirar el cociente incremental:

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(|h|) - f(0)}{h} \tag{5.1}$$

Si se estudia 5.1 por derecha:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(|h|)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

Como f es derivable en 0 el límite del cociente incremental en 0 es un número finito, al que llamaremos $f'(0)$. Así:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(|h|)-f(0)}{h} = f'(0)$$

Ahora, por izquierda, 5.1 queda:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(|h|)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-h)-f(0)}{h} = -\lim_{u\to 0^+} \frac{f(u)-f(0)}{u} = -f'(0)$$

Entonces, como $f'(0) \neq 0$, g no resulta derivable en 0, pero los límites laterales del cociente incremental en 0 son finitos.

6. Ejercicio 6

(I) **Verdadero**. *Demostración*: Suponemos $f+g$ continua en c, por lo que $(f+g)-g=f$ también es continua en c, lo que es absurdo.

(II) **Falso**. *Contraejemplo*: $f(x)$ cualquier cosa discontinua, $g(x)=0$.

(III) **Falso**. *Contraejemplo*:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 1 \text{ , si } x < c \\ 5 \text{ , si } x \geq c \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} 4 \text{ , si } x \leq 5 \\ 89 \text{ , si } x > 5 \end{cases} \\ (g\circ f)(x) &= 4 \end{aligned}$$

7. Ejercicio 7

Por teorema de Cantor, la continuidad en un intervalo cerrado implica la continuidad uniforme en dicho intervalo. Entonces, como g y h son continuas en $[0,1]$, son uniformemente continuas en dicho intervalo, y por la misma razón f no lo es. Como $[0,1) \subset [0,1]$, la respuesta es la misma para el $[0,1)$.

8. Ejercicio 8

Aplicando L'Hòpital tres veces:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x - x}{\log(1+x) - 1 - 2x + e^x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1}{\frac{1}{1+x} - 2 + e^x} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{-\frac{1}{(1+x)^2} + e^x} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cos x}{\frac{2}{(1+x)^3} + e^x} \\
\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x - x}{\log(1+x) - 1 - 2x + e^x} &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

9. Ejercicio 9

La sucesión puede escribirse como:

$$a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{3n} = \left(-\frac{8}{27}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Como a_n es convergente está acotada. Para estudiar el ínfimo, basta con ver que la subsucesión a_{2n} es siempre positiva, mientras que la a_{2n-1} siempre es negativa, por lo que el ínfimo de a_n será igual al ínfimo de a_{2n-1}. Además, como a_{2n-1} es creciente, el ínfimo será el $a_1 = -\frac{8}{27}$.

10. Ejercicio 10

(I) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$: Si se estudia la convergencia absoluta:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{3^n} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}$$

que es convergente por ser una geométrica ($\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$) de razón q menor a 1. La serie es entonces abolutamente convergente, y por lo tanto convergente.

(II) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$: No converge pues es armónica($\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$) de exponente ($\alpha$) igual a 1.

(III) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$

No converge pues es armónica de exponente menor a 1.