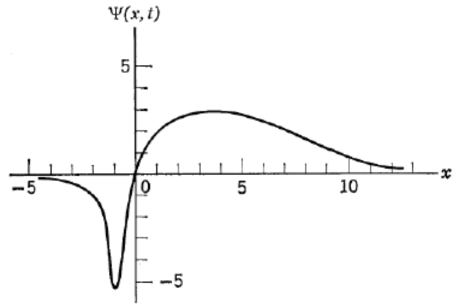
Introducción a la Física Moderna - Edición 2024

Práctico 7: Función de onda y ecuación de Schrödinger

Ejercicio 1. Muestre que si $\Psi_1(x,t)$ y $\Psi_2(x,t)$ son soluciones de la ecuación de Schrödinger, entonces $\Psi(x,t) = \alpha\Psi_1(x,t) + \beta\Psi_2(x,t)$, con α y β complejos, también es solución. ¿Qué cualidad de la ecuación es responsable de dicho comportamiento? Explique por qué es un requerimiento esencial que la ecuación satisfaga esta propiedad.

Ejercicio 2. La figura adjunta muestra la dependencia de la función de onda de una partícula con la posición en cierto instante de tiempo.



(a) Si se hace una medida de la posición de la partícula, indique cualitativamente en qué regiones es más probable encontrarla. ¿En qué regiones es menos probable?

(b) Indique si es más probable encontrar a la partícula en cualquier posicion $x > 0$ o en cualquier posición $x < 0$.

Ejercicio 3. Sea $\Psi(x,t)$ la función de onda de asociada a una partícula.

(a) Demuestre a partir de la ecuación de Schrödinger que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx$ es constante, e interprete el resultado.

(b) Considere la cantidad:

$$J(x,t) = \frac{-i\hbar}{2m}\left[\Psi^*(x,t)\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial x} - \Psi(x,t)\frac{\partial\Psi^*(x,t)}{\partial x}\right]$$

Muestre que

$$\frac{d}{dt}\int_a^b |\Psi(x,t)|^2 dx = J(a,t) - J(b,t)$$

e interprete el resultado. La cantidad $J(x,t)$ se denomina *flujo de probabilidad*.

Ejercicio 4. Muestre que si en lugar de emplear la expresión clásica para la energía se utiliza la expresión relativista, argumentos similares a los desarrollados en clase conducen a la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi,$$

El resultado anterior se denomina *ecuación de Klein-Gordon*, y describe el comportamiento de la función de onda asociada a una partícula sin espín en el límite relativista. Schrödinger obtuvo esta ecuación y luego la descartó por su incapacidad de predecir correctamente la estructura fina del espectro del hidrógeno (el problema radicaba en que el electrón es una partícula con espín).

Ejercicio 5. Considere el operador $\hat{O} = \frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}$.

(a) Investigue si alguna de las siguientes funciones es autofunción de $\hat{O}$. En caso afirmativo, indique el autovalor asociado:

(i) $\varphi = 2x^2 + 1$

(ii) $\varphi = 4x^4 - 12x^2 + 3$

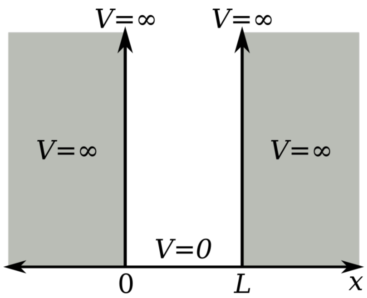
(b) Halle la familia de autofunciones de los siguientes operadores:

(i) $\hat{O}_1 = \dfrac{d}{dx}$

(ii) $\hat{O}_2 = x\dfrac{d}{dx}$

(iii) $\hat{O}_3 = \dfrac{d^2}{dx^2} + \alpha, \quad \alpha \in R$

Ejercicio 6. Considere una partícula en un pozo de potencial infinito:



$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & x < 0, x > L \end{cases}$$

Este potencial modela el comportamiento de una partícula encerrada en una caja unidimensional, rebotando elásticamente contra sus paredes.

(a) Muestre que las autofunciones del Hamiltoniano son de la forma:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n \in N$$

y que los correspondientes autovalores de energía son

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2mL^2}.$$

Nota: estas energías son predichas correctamente por la teoría de Wilson y Sommerfeld para sistemas periódicos (verificarlo!)

(b) Para cada una de las autofunciones anteriores evalúe $\Delta\hat{X}$, $\Delta\hat{P}$ y su producto.

(c) Muestre que las autofunciones $\varphi_n(x)$ satisfacen la condición de ortonormalidad:

$$\int_0^L \varphi_m^*(x)\varphi_n(x)dx = \delta_{mn}$$

(d) Indique cómo se expresa una solución general de la ecuación de Schrödinger (dependiente del tiempo) en términos de las funciones y energías anteriores.

(e) Asumiendo conocida la función de onda en el estado inicial, obtenga expresiones teóricas para los coeficientes del desarrollo obtenido en la parte anterior. ¿Qué condición deben satisfacer los coeficientes si la función de onda está normalizada?

Ejercicio 7. Un electrón está confinado en un pozo infinito unidimensional de ancho $0{,}1\,\mathrm{nm}$.

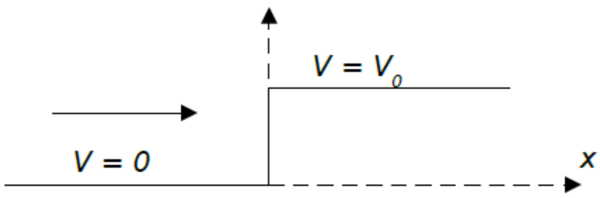
(a) Calcule los niveles de energía para el electrón hasta $n = 4$.

(b) Halle las longitudes de onda de todos los fotones que pueden ser emitidos en transiciones que involucren hasta el cuarto nivel energético.

Ejercicio 8.

Considere el potencial de escalón dado por la expresión:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x > 0 \end{cases}$$

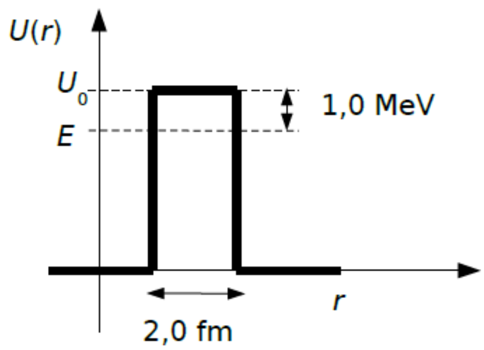


Suponga que una partícula de masa m (descrita por una onda plana) incide desde la izquierda con energía $E = V_0$.

(a) Calcule la función de onda de la partícula (debe suponer el experimento en una región acotada del espacio para verificar la normalización de la función de onda).

(b) Calcule los coeficientes de reflexión y transmisión para la partícula.

Ejercicio 9. En un modelo sencillo de un núcleo radioactivo, una partícula alfa ($m = 6{,}64 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$) queda atrapada por una barrera cuadrada de $2\,\mathrm{fm}$ de ancho y $30\,\mathrm{MeV}$ de altura.



(a) ¿Cuál es la probabilidad de tunelamiento cuando la partícula alfa incide sobre la barrera, si su energía cinética es $1\,\mathrm{MeV}$ menor que la barrera?

(b) Obtenga nuevamente la probabilidad de tunelamiento si ahora la energía de la partícula es $10\,\mathrm{MeV}$ menor que la barrera.

Ejercicio 10.

Sabiendo que el estado fundamental de una partícula de masa m que oscila armónicamente bajo el potencial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ es de la forma $\Psi_0 = a_0 e^{-b_0 x^2}$:

(a) Calcule los valores de a_0, b_0, y la energía asociada a ese estado.

(b) Calcule $\Delta\hat{X}$, $\Delta\hat{P}$, y su producto.

(c) Repita las partes anteriores para el primer estado excitado sabiendo que adopta la forma $\Psi_1 = a_1 x e^{-b_1 x^2}$