Introducción a la Física Moderna - Edición 2024

Resultados Práctico 7: Función de onda y ecuación de Schrödinger

Ejercicio 1

La linealidad de la ecuación es responsable por dicho comportamiento. En particular, que la suma de soluciones sea solución permite armar paquetes de onda para describir partículas localizadas.

Ejercicio 2

(a) Más probable: $x \approx -1$, x positivos pequeños (entre 3 y 5, aproximadamente). Es poco probable en un entrono de $x = 0$ o para valores muy grandes de x, tanto positivos como negativos.

(b) En $x > 0$

Ejercicio 3

(a) La partícula debe estar necesariamente en algún lugar del espacio.

(b) El cambio en la probabilidad de encontrar a la partícula en $[a, b]$ es igual a la diferencia entre el flujo que entra por a y el que sale por b (ecuación de continuidad).

Ejercicio 5

(a) (i) no es autofunción
  (ii) es autofunción, valor propio -8

(b) (i) $\varphi(x) = Ce^{\lambda x}$
  (ii) $\varphi(x) = Cx^{\lambda}$
  (iii) Las autofunciones dependen del signo de $\lambda - \alpha$. Por ejemplo, si $\lambda > \alpha$, entonces $\varphi(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda-\alpha}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda-\alpha}x}$

Ejercicio 6

(b) $\langle x \rangle = L/2$, $\langle p \rangle = 0$, $\langle x^2 \rangle = L\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2(n\pi)^2}\right)$, $\langle p^2 \rangle = \hbar^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2}$

(d) $\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}t}$

(e) $C_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L \Psi(x,0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$, $\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 = 1$

Ejercicio 7

(a) $E_1 = 37{,}6\,\text{eV}$, $E_2 = 150{,}5\,\text{eV}$, $E_3 = 338{,}6\,\text{eV}$, $E_4 = 602\,\text{eV}$

(b) $\lambda_{4\to 1} = 2{,}2\,\text{nm}$, $\lambda_{4\to 2} = 2{,}75\,\text{nm}$, $\lambda_{4\to 3} = 4{,}72\,\text{nm}$, $\lambda_{3\to 1} = 4{,}13\,\text{nm}$, $\lambda_{3\to 2} = 6{,}6\,\text{nm}$, $\lambda_{2\to 1} = 11\,\text{nm}$

Ejercicio 8

(a) $V(x) = \begin{cases} D\cos(kx), & x < 0 \\ D, & x > 0 \end{cases}$ donde $k = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar}$.

(b) $R = 1, T = 0$

Ejercicio 10

(a) $T = 0{,}114$

(b) $T = 0{,}0136$

Ejercicio 11

(b) $\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{k_I x}, & x < -a/2 \\ C\sin k_{II}x + D\cos k_{II}x, & -a/2 < x < a/2 \\ Ge^{-k_I x}, & x > a/2 \end{cases}$

con $K_I = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$, $K_{II} = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$

(f) (i) $x^2 + y^2 = \frac{mV_0 a^2}{2\hbar^2}$
(ii) $y = x\tan x$

Ejercicio 12

(a) $a_0 = \frac{(km)^{1/8}}{(\pi\hbar)^{1/4}}$, $b_0 = \frac{\sqrt{km}}{2\hbar}$, $E = \frac{\hbar w}{2}$, con $w = \sqrt{k/m}$.

(b) $\Delta\hat{X} = \frac{1}{2\sqrt{b_0}}$, $\Delta\hat{P} = \sqrt{b_0}\hbar \;\; \to \Delta\hat{X}\Delta\hat{P} = \frac{\hbar}{2}$ (estado de mínima incertidumbre).

(c) $a_1 = \frac{(km)^{3/8}}{\pi^{1/4}\hbar^{3/4}}$, $b_1 = \frac{\sqrt{km}}{2\hbar}$, $E_1 = \frac{3\hbar}{2}\frac{k}{m}$, $\Delta\hat{X} = \sqrt{\frac{3}{4b_1}}$, $\Delta\hat{P} = \hbar\sqrt{3b_1}$, $\Delta\hat{X}\Delta\hat{P} = \frac{3\hbar}{2}$.

Ejercicio 13

Véase, por ejemplo, la tabla 4.4 aquí

Ejercicio 14

(a) $A = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}$

(c) $P(r)dr = A^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} 4\pi r^2 dr$, $r_{max} = a_0$

(d) $\langle r\rangle = \frac{3}{2}a_0$

(e) $P(r < R) = 1 - e^{-\frac{2R}{a_0}}(2(R/a_0)^2 + 2(R/a_0) + 1)$, $\quad P(r < R) = 0{,}9 \to R \simeq 2{,}7a_0$

Ejercicio 15 Dado n, existen $n-1$ valores posibles para l, cada uno de los cuales puede, a su vez, estar asociado a $2l+1$ valores de m. Luego, la degeneración total será $g = \sum_{l=0}^{n-1}(2l+1)$. Usando que $\sum_{l=0}^{N} l = N(N+1)/2$, se obtiene que $g = 2(n-1)(n)/2 + n = n^2$