

# Implementación de optimización multiobjetivo en el diseño de un recipiente

Franco Herrero  
PLAPIQUI – CONICET - UNS  
Bahía Blanca, Argentina  
fherrero@plapiqui.edu.ar

## I. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

El problema consiste en fabricar contenedores de base cuadrada, abiertos por la parte superior con una capacidad de 10 m<sup>3</sup>. El fabricante desea minimizar el tanto el costo de los contenedores, así como el peso de los mismos. Dado que los materiales más ligeros son más costosos, existen soluciones de compromiso entre los diferentes objetivos.

El material con el que desea construir el fondo de la estructura cuesta \$1000/m<sup>2</sup> y pesa 4 Kg/m<sup>2</sup>, mientras que el material a emplear para las caras laterales cuesta \$500/m<sup>2</sup> y pesa 8 Kg/m<sup>2</sup> [1].

## II. MODELO MATEMÁTICO

Si se representa por  $x_1$  la dimensión de los lados de la base del contenedor y por  $x_2$  la dimensión de su altura, el problema bi-objetivo a resolver presenta la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \min f_1(x_1, x_2) &= 1000 x_1^2 + 2000 x_1 x_2 \\ \min f_2(x_1, x_2) &= 4 x_1^2 + 32 x_1 x_2 \end{aligned}$$

sujeto a:

$$x_1^2 x_2 = 10$$

donde  $f_1(x_1, x_2)$  y  $f_2(x_1, x_2)$  representan las expresiones matemáticas de los atributos costo y peso del contenedor, respectivamente.

## III. ESTRATEGIA DE RESOLUCION

El trabajo fue desarrollado empleando Pyomo en Google Colaboratory. Dado que se trata de un problema no lineal, se recurrió al solver Bonmin.

En primer lugar, se encontraron los extremos del frente de Pareto a partir optimización lexicográfica y optimización mono-objetivo.

Luego se emplearon las técnicas de sumas ponderadas,  $\epsilon$ -restricciones y  $\epsilon$ -restricciones aumentada, a fin de obtener el frente de Pareto aproximado.

Para evaluar la calidad de los resultados, se emplearon métricas de calidad (distancia mínima del frente de Pareto al

vector ideal) y de dispersión de las soluciones en el frente de Pareto (spacing y spread).

Además, haciendo uso de la librería *time*, se obtuvo el tiempo de cómputo de las diferentes técnicas para comparar la eficiencia computacional.

Por último, con el objetivo de visibilizar las fortalezas del método de las  $\epsilon$ -restricciones aumentado, se analizó el mismo problema, pero con variables enteras.

### A. Método de sumas ponderadas

El problema de optimización es el siguiente

$$\max \left( \frac{f_{1,max} - f_1(x_1, x_2)}{f_{1,max} - f_{1,min}} w_1 + \frac{f_{2,max} - f_2(x_1, x_2)}{f_{2,max} - f_{2,min}} w_2 \right)$$

sujeto a:

$$x_1^2 x_2 = 10$$

Donde  $w_1$  y  $w_2$  son los pesos asociados al costo y al peso del contenedor, respectivamente. Además,  $(f_{1,max} - f_{1,min})$  y  $(f_{2,max} - f_{2,min})$  constituyen los rangos del costo y del peso en el frente de Pareto, respectivamente.

### B. Método de las $\epsilon$ -restricciones [2]

Se eligió arbitrariamente la función asociada al costo como prioritaria. Entonces, se resolvió el siguiente problema de optimización

$$\min f_1(x_1, x_2)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_2) &\leq \epsilon_2 \\ x_1^2 x_2 &= 10 \end{aligned}$$

### C. Método $\epsilon$ -restricciones aumentado [2,3]

El problema de optimización a resolver es el siguiente

$$\min \left( f_1(x_1, x_2) + \frac{\delta s_2}{f_{2,max} - f_{2,min}} \right)$$

sujeto a:

$$f_2(x_1, x_2) - s_2 \leq \varepsilon_2$$

$$x_1^2 x_2 = 10$$

donde  $s_2$  es la variable de holgura de la restricción,  $\delta$  es equivalente a 0,00001 y  $\varepsilon_2 \in [f_{2,min}, f_{2,max}]$ .

#### IV. EVALUACIÓN EXPERIMENTAL

##### A. Extremos del frente de Pareto

Los extremos del frente de Pareto encontrados a partir de optimización lexicográfica coinciden con los extremos hallados a partir de la optimización mono-objetivo de las dos funciones costo y peso por separado.

Extremo 1:

$$x_1=2,15 \quad x_2=2,15$$

$$f_1=13924 \quad f_2=167$$

Extremo 2:

$$x_1=3,42 \quad x_2=0,85$$

$$f_1=17544 \quad f_2=140$$

##### B. Frentes de Pareto

En las Figuras 1 a 3 se muestran los frentes de Pareto obtenidos a partir de los métodos de sumas ponderadas,  $\varepsilon$ -restricciones y  $\varepsilon$ -restricciones aumentado para un número de 11 soluciones no dominadas.

Como se puede observar, la técnica de las sumas ponderadas permite alcanzar una cobertura más uniforme del frente de Pareto que las demás técnicas. Esta situación se condice con el hecho de que el método antes mencionado presenta mejores valores de spacing y spread, como se analizará más adelante. Además, dado que el frente de Pareto es convexo, no hay soluciones no respaldadas que el método de las ponderaciones no pueda hallar.

Por otra parte, a partir de la visualización de los diferentes frentes de Pareto se puede inferir que, en este caso, el método de las  $\varepsilon$ -restricciones aumentado no ofrece mejoras respecto al de las  $\varepsilon$ -restricciones, dado que en este último no se encontraron soluciones repetidas. Esta similitud se mantiene cuando se considera un número de intervalos ( $n$ ) mayor, y es consecuencia de que se trata de un problema continuo, por lo cual cada ejecución del algoritmo permite hallar una solución no dominada diferente.

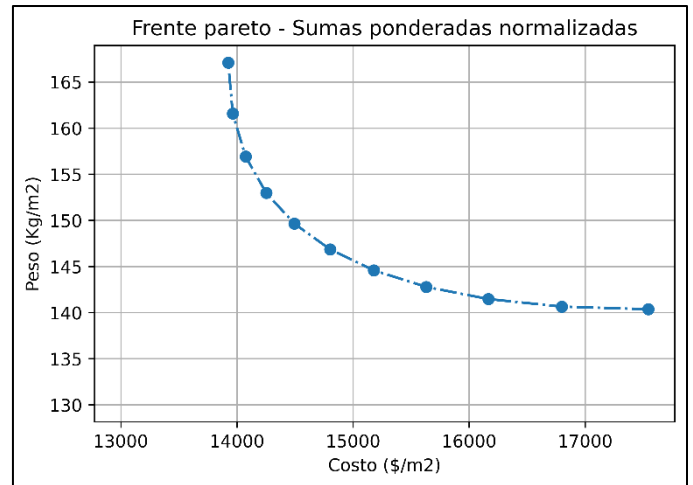


Figura 1. Frente de Pareto obtenido mediante Sumas ponderadas

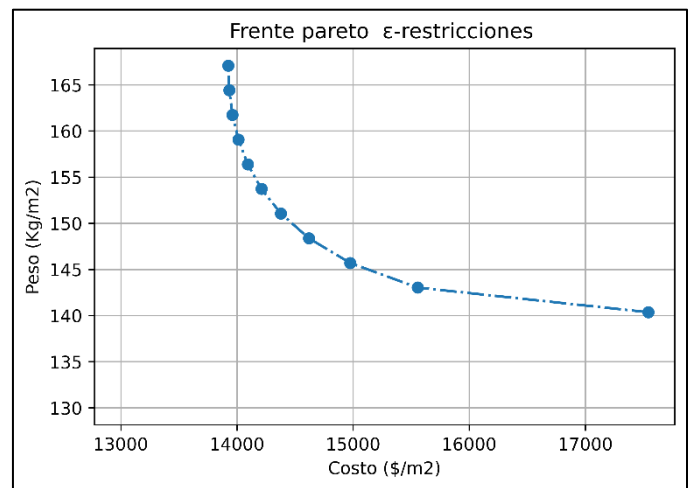


Figura 2. Frente de Pareto obtenido mediante  $\varepsilon$  - restricciones

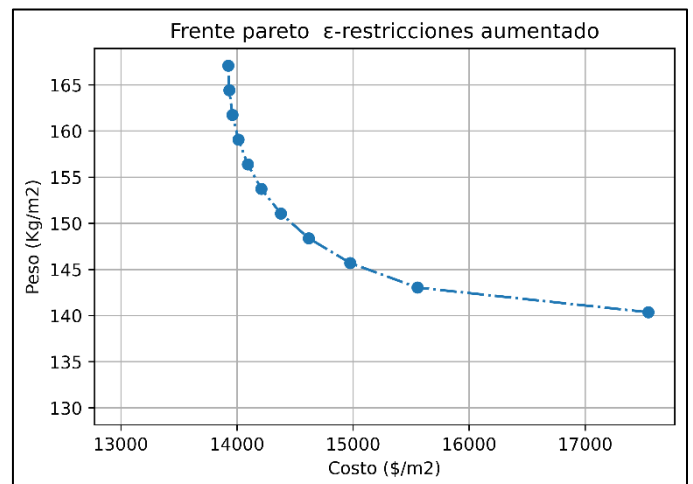


Figura 3. Frente de Pareto obtenido mediante  $\varepsilon$  - restricciones aumentado

### C. Comparación entre los métodos

Con el objetivo de evaluar la calidad de las soluciones obtenidas, se emplearon tanto métricas de calidad como de cobertura del frente de Pareto. Cabe resaltar que, dado que el costo y el peso presentan escalas diferentes, en todos los casos se realizó una normalización tomando como referencia la diferencia entre los valores máximos y mínimos de las funciones costo y peso en el frente de Pareto.

Los resultados obtenidos se resumen en la Tabla I. Para todos los casos, los valores de las métricas para  $\epsilon$ -restricciones y  $\epsilon$ -restricciones aumentado son prácticamente idénticos. Este hecho se condice con la similitud de las Figuras 2 y 3.

Para evaluar calidad de las soluciones se consideró la distancia mínima del frente de Pareto al vector ideal, el cual fue hallado a partir de optimización lexicográfica. Se eligió esta alternativa debido a que no se dispone del frente de Pareto real, por lo cual resulta imposible calcular métricas como la distancia generacional. Los valores obtenidos son idénticos entre los diferentes métodos a excepción del caso en el que  $n$  es igual a 10. En dicho caso, el método de las ponderaciones resulta levemente superior.

Para evaluar la dispersión de las soluciones no dominadas, se emplearon las métricas spacing y spread. En ambos casos, el método de las sumas ponderadas proporciona mejores resultados, lo cual coincide con el hecho de que esta técnica ofrece una cobertura más homogénea del frente de Pareto al observar las Figuras 1 a 3.

### D. Eficiencia computacional

Haciendo uso de la librería *time* de Python, se obtuvieron los tiempos de cómputo de cada uno de los métodos empleados. Es

necesario resaltar que la obtención de las métricas no fue considerada en este cálculo.

Los resultados se resumen en la Tabla II. Para los diferentes números de intervalos, el método de las  $\epsilon$ -restricciones aumentado presenta tiempos de cómputo menores, aun cuando no se calcularon soluciones dominadas repetidas. Esta tendencia se acentúa a medida que se incrementa  $n$ .

Por otro lado, el método de las  $\epsilon$ -restricciones resulta menos eficiente computacionalmente que el método de las ponderaciones a  $n$  grandes. Esta situación es lógica, ya que el primer método tiene una restricción no lineal más, lo cual incrementa la complejidad del problema.

### E. Modelo con variables enteras

Con la finalidad de poder visualizar las mejoras que presenta el método de las  $\epsilon$ -restricciones aumentado con respecto al de las  $\epsilon$ -restricciones, se ejecutó el mismo modelo pero con variables enteras. No obstante, al buscar los extremos, ya sea mediante optimización mono-objetivo u optimización lexicográfica, sólo se halló el siguiente punto:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 & x_2 &= 10 \\ f_1 &= 21000 & f_2 &= 324 \end{aligned}$$

En consecuencia, no se pudo realizar el análisis deseado.

Tabla I. Resultados de las métricas

Métrica	n	Sumas ponderadas	$\epsilon$ -restricciones	$\epsilon$ -restricciones aumentado
Distancia al vector ideal	10	0,343	0,352	0,352
	100	0,343	0,343	0,343
	200	0,343	0,343	0,343
	500	0,343	0,343	0,343
Spacing	10	0,096	0,174	0,174
	100	0,213	0,557	0,558
	200	0,222	0,634	0,635
	500	0,227	0,709	0,710
Spread	10	0,259	0,446	0,446
	100	0,155	0,461	0,462
	200	0,148	0,475	0,476
	500	0,144	0,491	0,490

Tabla II. Tiempos de cómputo (s)

n	Sumas ponderadas	$\varepsilon$ -restricciones	$\varepsilon$ -restricciones aumentado
10	2,66	2,65	1,96
100	9,71	8,76	8,15
200	12,32	17,24	12,01
500	30,17	32,94	27,71
1000	52,99	57,6	51,62

#### REFERENCIAS

- [1] Romero, C. (1996). Análisis de las decisiones multiobjetivo (Vol 14). Madrid: Isdefe
- [2] Mavrotas, G. (2009). Effective implementation of the  $\varepsilon$ -constraint method in the multiobjective mathematical programming problems. *Applied Mathematics and Computation*.
- [3] Mavrotas, G. & Florios, K. (2013). An improved version of the augmented  $\varepsilon$ -constraint method (AUGMECON2) for finding the exact pareto set in multi-objective integer programming problems. *Applied Mathematics and Computation*.